

Тема 2 "Вариационные проблемы уравнений в частн. производных: часть 1"

Задача 2.1. Найти функцию $u \in H_0^1(0,1)$, реализующую миним. функционала

$$E(u) = \int_0^1 (u'^2 + u^2) dx + 2 \int_0^1 u dx. \quad (1)$$

Решение. $E(u) = (u, u) + 2l(u)$,
где $(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$ —
стандартное скал. произведение в
 $H^1(0,1)$ [$H_0^1(0,1) = \{u \in H^1(0,1) : u(0)=0, u(1)=0\}$ — замкнутое подпр-во
в $H^1(0,1)$], $l(u) = \int_0^1 u dx$. Докажем,
что l — озр. лнн. ф-л на $H^1(0,1)$:

$$|l(u)| \leq |(1, u)_{L_2(0,1)}| \leq \|1\|_{L_2(0,1)} \cdot \|u\|_{L_2(0,1)}$$

пер-во К-Б-Ш

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq \|u\|_{H_0^1(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)},$$

1D нер-во Фридрихса

$$\text{где } \|u\|_{H_0^1(0,1)}^2 = \int_0^1 u'^2 dx.$$

Таким образом, ф-л (1) удовл.
 условиям теоремы об экстремали:
 $\exists! \hat{u} \in H_0^1(0,1), \hat{u} = \arg \min_{u \in H_0^1(0,1)} E(u).$

Необходимое у-е экстремали:

$$\forall v \in H_0^1(0,1) \quad (\hat{u}, v) + l(v) = 0.$$

В интегральном виде:

$$\int_0^1 (\hat{u}' v' + \hat{u} v) dx + \int_0^1 v dx = 0.$$

Предположим, что $\hat{u} \in H^2(0,1)$, и
 проинтегрируем по частям:

$$\hat{u}' v \Big|_0^1 + \int_0^1 (-\hat{u}'' + \hat{u} + 1) v dx = 0.$$

Т.к. $v \in H_0^1(0,1)$, $v(0) = v(1) = 0$,
 интеграл по границе исчезает:

$$\int_0^1 (-\hat{u}'' + \hat{u} + 1) v \, dx = 0.$$

Т.к. можно брать любую $v \in C_0^\infty(0,1) \subset H_0^1(0,1)$, по лемме Дюбуа-Реймона имеем

$$-\hat{u}'' + \hat{u} + 1 = 0 \Leftrightarrow \hat{u}'' - \hat{u} = 1 \text{ п.в. на } [0,1]$$

Это ур-ие Эйлера-Лагранжа, соответствующее ф-лу (1). Экстремаль $\hat{u}$ есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} \hat{u}'' - \hat{u} = 1, 0 < x < 1, \\ \hat{u}(0) = 0, \hat{u}(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Общее решение уравнения:

$$\hat{u} = A \cosh x + B \sinh x - 1.$$

Находим константы A и B :

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 - 1 = 0 \\ A \cosh 1 + B \sinh 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1 - \cosh 1}{\sinh 1} \end{cases}$$

Ответ: $\hat{u}(x) = \cosh x + \frac{1 - \cosh 1}{\sinh 1} \sinh x - 1.$

Задача 2.2. Доказать, что для
 всех функций $u \in H^1(\Omega)$, где
 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, удовлетворяющих
 граничным условиям

$$u|_{x_1=0} = 0, \quad u|_{x_2=0} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{x_1=1} = x_2, \quad u|_{x_2=1} = x_1,$$

справедливо неравенство

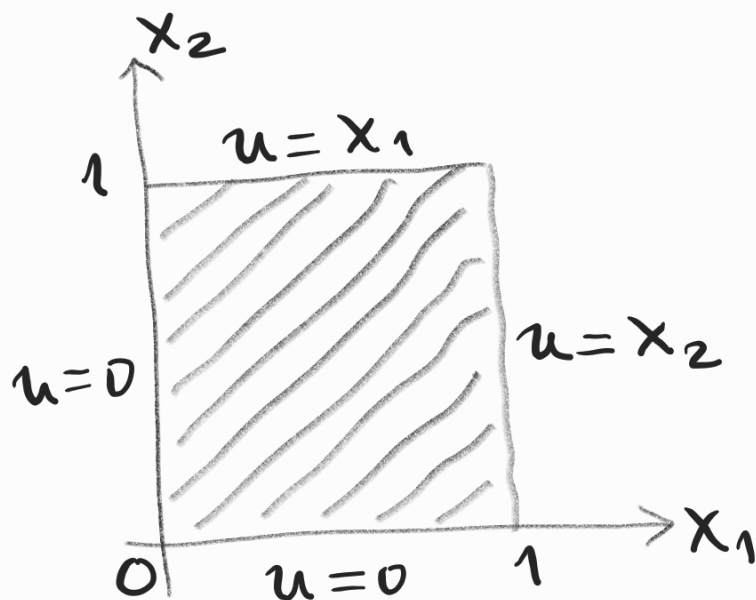
$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \geq \frac{2}{3}.$$

Имеет ли место равенство для
 каких-либо ф-ий из этого семейства?

Решение. Пусть

$\mathcal{U} = \{ u \in H^1(\Omega) : \text{краевые ум-я (3)} \},$

$$E(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2.$$



Имеем вариационную задачу

$$E(u) \rightarrow \min, u \in \mathcal{U}. \quad (4)$$

Проблема в том, что задача (4) поставлена на замкнутом аффинном подпр-ве пр-ва $H^1(\Omega)$. Поэтому для её решения надо либо ввести модифицированный ф-л энергии и рассмотреть его на всём $H^1(\Omega)$, либо сделать редукцию. Будем следовать вторым методом.

Редукция: $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ остаётся произвольной, а $w \in H^1(\Omega)$ — конкретная ф-ия, удовл. краевым условиям (3). Подходит $w(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Преобразуем ф-л энергии

$$E(u) = E(u_0 + w) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right] dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx_1 dx_2 +$$

$$+ 2 \iint_{\Omega} \left(x_2 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2. \text{ Имеем:}$$

$$1) \iint_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1$$

$$\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_2 = \int_0^1 \left(x_1^2 + \frac{1}{3} \right) dx_1 = \frac{2}{3};$$

$$2) \iint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u_0 dx_1 dx_2 = - \iint_{\Omega} u_0 \Delta w dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int_{\partial \Omega} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \underbrace{u_0|_{\partial \Omega}}_{=0} dS = 0. \text{ Так получилось,}$$

$$\text{потому что } w \in H^2(\Omega), \Delta w = 0.$$

Итак, вариационная задача относи-
тельно u_0 имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{E}(u_0) = \iint_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx_1 dx_2 + \frac{2}{3} \rightarrow \min, \\ u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Её очевидное единственное решение
 $\hat{u}_0 = 0$. Но тогда решение задачи (4)

Пусть $\hat{u} = w$, $\min_{u \in U} E(u) = E(\hat{u}) = E(w) = \frac{2}{3}$
 и мы доказали нер-во. Равенство
 достигается тогда и только тогда, когда
 $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Задача 2.3. Пусть

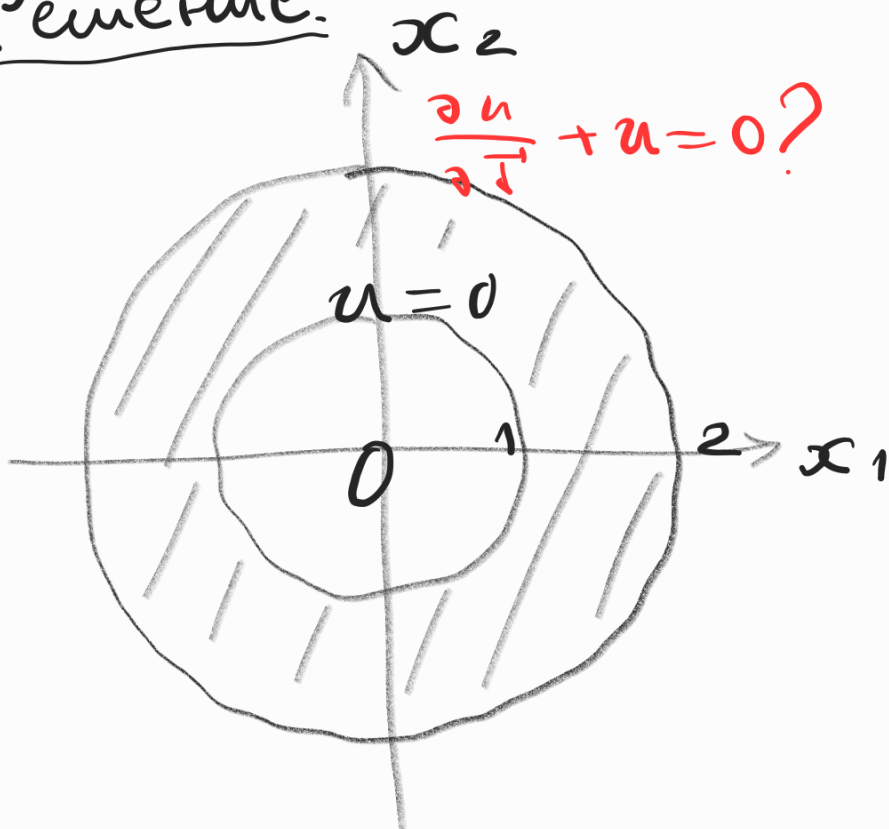
$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ — кольцо,

$$E(u) = \iint_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 4u) dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} u^2 ds.$$

Найти минимум $E(u)$ на пр-ве

$$H = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{|x|=1} = 0\}.$$

Решение.



Преобразуем φ -л энергии:

$$E(u) = \underbrace{\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} u^2 dS}_{\text{лин. часть}} + 2 \iint_{\Omega} 2u dx_1 dx_2 \text{ кваср. часть}$$

$$(u, v)' = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{|x|=2} u^2 dS -$$

скал. произведение в H , порожд. эквивалентную норму.

$$\ell(u) = \iint_{\Omega} 2u dx_1 dx_2 = (2, u)_{L_2(\Omega)}$$

отр. лин. φ -л над H .

По теореме об экстремали $\exists! \hat{u} \in H$ -
решение вариацион. задачи

$$E(u) \rightarrow \min, u \in H.$$

Необходимое уа-ие экстремали:

$$\forall v \in H \quad (\hat{u}, v)' + l(v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\iint_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v \, dx + \int_{|x|=2} \hat{u} v \, dS + \iint_{\Omega} 2v \, dx = 0.$$

Как всегда предположим, что $\hat{u} \in H^2(\Omega)$. Применим первую ф-лу Грина:

$$\iint_{\Omega} (-\Delta \hat{u} + 2)v \, dx + \int_{|x|=2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \vec{\nu}} + \hat{u} \right) v \, dS = 0. \quad (4)$$

$$1) \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \iint_{\Omega} (-\Delta \hat{u} + 2)v \, dx = 0.$$

По лемме Дюбуа-Реймона $\Delta \hat{u} = 2$ - ур-е Эйлера-Лагранжа, соотв.

ф-лу энергии.

2) Рассмотрим произвольную $\psi \in C^\infty(|x|=2)$. По теореме о тонком поднятии $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_\varepsilon \in H$ со св-ми:

а) $v_\varepsilon|_{|x|=2} = \psi$; б) $\text{supp } v_\varepsilon \subset \{x \in \Omega : 2-\varepsilon \leq |x| \leq 2\}$; в) $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Тогда $\left| \iint_{\Omega} (-\Delta \hat{u} + 2) v_{\varepsilon} dx \right| \leq$
 $\leq \| -\Delta \hat{u} + 2 \|_{L_2(\Omega)} \| v_{\varepsilon} \|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при
 $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому предельный переход
 в интегральном рав-ве (4) даёт
 $\int_{|x|=2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \vec{n}} + \hat{u} \right) v ds = 0$. По лемме
 Дюбуа-Реймона $\left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vec{n}} + \hat{u} \right|_{|x|=2} = 0$.

Т.о., экстремаль ф-ла энергии удовл.
 краевой задаче

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} = 2 & \text{в } \Omega \\ \hat{u}|_{|x|=1} = 0, \\ \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vec{n}} + \hat{u} \right|_{|x|=2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Легко видеть, что решение задачи
 (5) имеет радиальную симметрию:
 $\hat{u} = \hat{u}(s)$, $s = |x|$ — полярный радиус.

$$\begin{cases} \hat{u}_{ss} + \frac{2}{s} \hat{u}_s = 0, & 1 < s < 2, \\ \hat{u}(1) = 0, & \hat{u}'(2) + \hat{u}(2) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения есть

$$\hat{u}(s) = A \ln s + B + \frac{1}{2} s^2.$$

Подставим в краевые условия:

$$\begin{cases} A \ln 1 + B + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{A}{2} + 2 + A \ln 2 + B + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{1}{2}, \quad A = \frac{-4 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{-9}{\ln(4e)}.$$

Вычисления показывают, что минимум ф-ла энергии

$$E(\hat{u}) = \frac{\pi(51 - 94 \ln 2)}{2(\ln 4 + 1)} \approx -9.3.$$

Задача 2.4. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ — единичный трёхмерный шар. Показать, что для всех ф-ий $u \in H^1(B)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = \cos \theta$, где θ — широта в сфер. системе координат, справедливо неравенство

$$\iiint_B (|\nabla u|^2 + 2u) dx_1 dx_2 dx_3 \geq \frac{56\pi}{45}.$$

Решение. Имеем вариационную проблему

$$\begin{cases} E(u) = \iiint (|\nabla u|^2 + 2u) dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow \min, \\ u \in H^1(B), u|_{|x|=1} = \cos \theta. \end{cases}$$

Сделаем редукцию: $u = v + w$, где $v \in H_0^1(B)$, $w \in H^1(B)$ — некоторая функция, удовлетворяющая краевому условию $w|_{|x|=1} = \cos \theta$.

Проще всего взять $w = x_3 = \rho \cos \theta$, $\rho = |x|$.

Преобразуем ф-лу энергии:

$$E(u) = E(v + w) = \iiint_B (|\nabla v|^2 + 2v) dx_1 dx_2 dx_3 + 2 \iiint_B \nabla v \cdot \nabla w dx_1 dx_2 dx_3 + E(w). \text{ Вычисляем:}$$

$$E(w) = \iiint_B (|\nabla w|^2 + 2w) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \iiint_B (1 + 2x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4}{3} \pi.$$

Заметим, что $w \in H^2(B)$, $\Delta w = 0$.

Первая формула Грина даёт:

$$\begin{aligned} \iiint_B \nabla v \cdot \nabla w dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\partial B} v \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} dS - \\ &- \iiint_B v \Delta w dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, относительно v вариационная задача имеет вид

$$\tilde{E}(v) = \iiint_B |\nabla v|^2 dx_1 dx_2 dx_3 + \\ + 2 \iiint_B v dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{4}{3} \kappa \rightarrow \min,$$

$v \in H_0^1(B)$. Кр-во Фридрихса $\Rightarrow$

$$(v, \tilde{v})' = \iiint_B \nabla v \cdot \nabla \tilde{v} dx_1 dx_2 dx_3 -$$

скалярное произведение в $H_0^1(B)$,

порождающее эквивалентную норму.

Легко видеть, что $\langle l, v \rangle = \iiint_B v dx_1 dx_2 dx_3 -$

ограниченный линейный функционал.

Поэтому $\exists! \hat{v} = \arg \min_{v \in H_0^1(B)} \tilde{E}(v)$.

Необходимое условие экстремали:

$$\forall \delta v \in H_0^1(B) \quad (\hat{v}, \delta v)' + \langle l, \delta v \rangle = 0$$

или, в интегральном виде:

$$\iiint_B \nabla \hat{v} \cdot \nabla (\delta v) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_B \delta v dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Предположим, что $\hat{v} \in H^2(B)$, и применим первую ф-лу Грина:

$$\iint_B (-\Delta \hat{v} + 1) \delta v \, dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Из леммы Дюбуа-Реймона получаем

$\Delta \hat{v} = 1$ — ур-ие Эйлера-Лагранжа.

Экстремаль удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \Delta \hat{v} = 1 & \text{в } B, \\ \hat{v}|_{\partial B} = 0. \end{cases}$$

Она имеет решение с радиальной симметрией $\hat{v} = \hat{v}(s)$. Можем

записать

$$\begin{cases} \hat{v}'' + \frac{2}{s} \hat{v}' = 1, & 0 < s < 1 \\ \hat{v}(s) = \underline{O}(1), & s \rightarrow +0, ? \\ \hat{v}(1) = 0 & \hat{v} \in H^2(B) \end{cases}$$

По т. вложения Соболева
 $H^2(B) \subset C(\bar{B})$ при $n=3$.

Поэтому $\hat{v}$ не должна
иметь особенность при $s \rightarrow 0$.

Общее решение уравнения:

$$\hat{v}(s) = \frac{A}{s} + B + \frac{1}{6}s^2. \text{ Асимптоти-}$$

ческое условие даёт $A=0$.

$$\text{Условие Дирихле} \Rightarrow B + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$B = -\frac{1}{6}. \text{ Итак, } \hat{v}(s) = \frac{1}{6}(s^2 - 1)$$

$$\text{или } \hat{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1).$$

Вычисления показывают, что

$$\tilde{E}(v) = -\frac{4\pi}{45} + \frac{4\pi}{3} = \frac{56\pi}{45}.$$