

Лекция #6

Тема 2 "Эллиптические операторы второго порядка"

План

1. Эллиптические оп-ры
Постановка задач
2. Вариационная теория
3. Сильные и обобщённые
решения краевых задач
4. Корректность и фредгольмова
разрешимость.
5. Спектр и собственные
ф-ии дивергентных эллипт.
операторов
6. Гладкость и другие св-ва
обобщённых решений и с.ф.
- 7* Некоторые нелинейные
эллиптические оп-ры второго п-ка.
- 8* О стационарной системе Стокса.

§1. Эллиптические оп-ры.

Постановка краевых задач

(повторение темы 2 основной сем-ра)

Определение 2.1. ЛДО $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$

называется эллиптическим в точке $x^0 \in \Omega$, если $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ главный символ $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x^0) \xi^\alpha \neq 0$. ЛДО L называется эллиптическим в об-ти Ω , если $\forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0$ (он эллиптический в каждой точке).

Замечания

- 1) Опр. 2.1 остаётся в силе, если коэфф-ты старшей части оп-ра принимают компл. значения
- 2) При $n > 2$ всякий эллиптический оп-р имеет чётный порядок. Для $n = 2$ это неверно: например, оп-р Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ эллиптический.

3) Однако же, если все коэф-ты оператора принимают вещественные значения, то и при $n=2$ порядок эллиптического оп-ра всегда чётный.

Примеры 1) $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ — оп-р Кошл.
производной, оп-р Коши-Римана
2) $-\Delta$ — противоположный оп-р
Лапласа, $\Delta + c(x)$ — оп-р Гельмгольца
3) Δ^2 — билапласиан.

Дивергентная форма эллиптического оп-ра второго n -ка

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \operatorname{div}(\vec{b}(x)u) + c(x)u, \quad (2.1)$$

причём квадр. м-ца $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$
положительно (отрицательно)
определена в об-ти эллиптичности Ω ,
 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, a_{ij}, b, c — ф-ии в Ω
к виду (2.1) можно привести любой
ЛЭО второго n -ка в об-ти Ω :

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) u_{x_i} + C(x)u.$$

(Важно! Косоэрмитов):

$$\begin{cases} \vec{B}(x) = \vec{b}(x) - \operatorname{div} A(x), \\ C(x) = c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{b}(x) = \vec{B}(x) + \operatorname{div} A(x), \\ c(x) = C(x) - \operatorname{div} \vec{b}(x). \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{div} A(x) = (\operatorname{div} \vec{A}_1(x), \dots, \operatorname{div} \vec{A}_n(x))$,
 $\vec{A}_1(x), \dots, \vec{A}_n(x)$ — столбцы n -ой $A(x)$.

$\mathcal{LDO}$, формально сопряжённый к $\mathcal{LDO}$ (2.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*v &= -\operatorname{div}(A(x)\nabla v) - \vec{b}(x) \cdot \nabla v + c(x)v = \\ &= -\operatorname{div}(A(x)\nabla v) - \operatorname{div}(\vec{b}(x)v) + [c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)]v. \end{aligned}$$

Утверждение 2.1. $\mathcal{LDO}$ (2.1) формально самосопряжён ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$) $\Leftrightarrow \vec{b}(x) \equiv 0$,
 т.е. он имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u. \quad (2.2)$$

$\mathcal{LDO}$ вида (2.2) — гиперэллиптический оп-р.

Дивергентные ЭЛДО второго л-ка имеют ряд замечательных св-в, которым общие эллип. оп-ра не удовлетворяют.

Определение 2.2. ЛДО (2.1)
равномерно эллиптичен в об-ти Ω , если $\exists \gamma > 0 \forall x \in \Omega \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\xi^T A(x) \xi \geq \gamma |\xi|^2$ (либо $\xi^T A(x) \xi \leq -\gamma |\xi|^2$, если речь идёт об отрицательно определённой m -е коэф-ов старшей части).

Замечание: в контексте краевых задач коэф-ты оп-ра должны быть определены и на $\partial\Omega$, указанные нер-ва должны быть выполнены для всех $x \in \bar{\Omega}$. По умолчанию будем считать, что m -я A в оп-ре (2.1) положительно определена (ур-ие всегда можно умножить на -1).

Поставим стандартные внутренние краевые задачи для равномерно

эллиптического ЛДО (2.1) в об-ти $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Будем считать, что $a_{ij}, b_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ($i, j = 1, \dots, n$), $c \in C(\bar{\Omega})$.
Внутренняя задача Дирихле:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.3)$$

Внутренняя задача Робена:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в } \Omega, \\ A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} + b(x) u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.4)$$

В задаче (2.4) $b \in C(\partial\Omega)$ — гранич-
ный коэф-т в усл-ии Робена,

$$A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} = \nabla u \cdot \vec{\nu}_A, \text{ где } \vec{\nu}_A = A(x) \vec{\nu}$$



$A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} = \nabla u^T A(x) \vec{\nu}$ —
скал. произведение с n -й
грамм $A(x)$ в станд. базисе.

Если $b(x) \equiv 0$, то задача (2.4)
превращается в задачу Неймана.

§2. Вариационная теория

- H - гильбертово пр-во;
- $S(\cdot, \cdot)$ - симм. билинейная форма в H , согласованная со скал. пр-ем в H : $\exists \alpha > 0, \beta > 0 \forall u \in H$
 $S(u, u) \leq \alpha^2 (u, u), (u, u) \leq \beta^2 S(u, u)$
- $\Leftrightarrow \|u\|' = \sqrt{S(u, u)}$ - экв. норма в H ;
- ℓ - отр. лине. ф-л на H , т.е. $\ell \in H^*$.
Обозначим $\langle \ell, u \rangle = \ell(u)$ и рассмотрим в H функционал энергии $E(u) = S(u, u) - 2\langle \ell, u \rangle$.
Поставим вариационную проблему
$$E(u) \rightarrow \min, u \in H. \quad (2.5)$$

Теорема 2.1 (теорема об экстремалах).
Пусть S - согласованная симм. билин. форма в H , $\ell \in H^*$. Тогда $\exists! \hat{u} \in H$, называемый экстремалью, минимизирующий ф-л энергии $E(u) = S(u, u) - 2\langle \ell, u \rangle$, т.е. задача (2.5) имеет единственное решение.

Замечание: $\hat{u} = \arg \min_{u \in H} E(u)$.

Доказательство. 1) покажем, что ф-л энергии ограничен снизу:

$$\begin{aligned} E(u) &= \|u\|'^2 - 2\langle \ell, u \rangle \geq \|u\|'^2 - \\ &- 2|\langle \ell, u \rangle| \geq \|u\|'^2 - 2\|\ell\|^* \|u\| \geq \\ &\geq \|u\|'^2 - 2\beta \|\ell\|^* \|u\|' = (\|u\|' - \beta \|\ell\|^*)^2 - \\ &- \beta^2 \|\ell\|^{*2} \geq -\beta^2 \|\ell\|^{*2}. \end{aligned}$$

Здесь $\|\ell\|^*$ — норма ф-ла ℓ в пр-ве H^* ; кроме того, использовано нер-во $-\|u\| \geq -\beta \|u\|'$. Обозначим $\mu = \inf_{u \in H} E(u)$.

2) Посл-ть $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ называется минимизирующей, если $E(u_j) \rightarrow \mu, j \rightarrow \infty$ (по определению точной нижней грани минимизирующая посл-ть существует). Покажем, что всякая минимизирующая посл-ть фундаментальна. Имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall N \exists j \geq N$ верно нер-во $\mu \leq E(u_j) \leq \mu + \varepsilon$. Из тожд-ва парал-лограммы

$$\left\| \frac{u_i + u_j}{2} \right\|'^2 + \left\| \frac{u_i - u_j}{2} \right\|'^2 = \frac{1}{2} (\|u_i\|'^2 + \|u_j\|'^2)$$

получим $\left\| \frac{u_i - u_j}{2} \right\|'^2 = \frac{1}{2} (E(u_i) + E(u_j)) - E\left(\frac{u_i + u_j}{2}\right)$. Но $E\left(\frac{u_i + u_j}{2}\right) \geq \mu$, поэтому
 $\forall i, j \in \mathbb{N}, i, j \geq N$, будем иметь

$$\left\| \frac{u_i - u_j}{2} \right\|'^2 \leq \frac{1}{2} (\mu + \varepsilon + \mu + \varepsilon) - \mu = \varepsilon.$$

Т.к. стандартная норма порождена $\|\cdot\|'$, $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — функ. пос-ть в H .
 3) В силу полноты $H \exists \lim_{j \rightarrow \infty} u_j = \hat{u} \in H$ — экстремаль.
 всякой минимизирующей пос-ти.
 увидим, что $E(\hat{u}) = \mu$, т.е. $\hat{u}$ — экстремаль.
 Действительно, $\langle l, u_j \rangle \rightarrow \langle l, \hat{u} \rangle, j \rightarrow \infty$
 (l — непр. ф-л), $\|u_j - \hat{u}\|' \leq \alpha \|u_j - \hat{u}\| \rightarrow 0$
 при $j \rightarrow \infty$, поэтому возможен пред.
 переход: $\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} E(u_j) = E(\hat{u})$.

4) Докажем единственность экстремали.
 Пусть $\tilde{u} \in H$ — другая экстремаль. Тогда
 пос-ть $\hat{u}, \tilde{u}, \hat{u}, \tilde{u}, \dots$ минимизирует ф-л

энергии $\Rightarrow$ она фундаментальна $\Rightarrow$

$$\hat{u} = \tilde{u} \quad \blacksquare$$

Утверждение 2.2 (необх. усл-е экстремальн.)

Пусть $\hat{u} \in H$ — экстремаль ф-ла энергии,
т.е. решение вариацион. проблемы (2.5).

Тогда $\forall v \in H$

$$s(\hat{u}, v) - \langle l, v \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Рассмотрим произволь-
ный элемент $v \in H$, число $t \in \mathbb{R}$, найдём
приращение ф-ла энергии:

$$\begin{aligned} 0 \leq E(\hat{u} + tv) - E(\hat{u}) &= s(\hat{u} + tv, \hat{u} + tv) - \\ &- 2\langle l, \hat{u} + tv \rangle - s(\hat{u}, \hat{u}) + 2\langle l, \hat{u} \rangle = \\ &= s(v, v)t^2 + 2t(s(\hat{u}, v) - \langle l, v \rangle). \end{aligned}$$

Отсюда $s(\hat{u}, v) - \langle l, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H \quad \blacksquare$

Замечание. Рав-во (2.6) связывает
краевые задачи и ф-лы энергии. Отме-
тим, что в утв. 2.2 не требуется
(как в теореме 2.1) ни полнота H ,
ни согласованность симм. билин. формы
 s . Однако, если требования теоремы
2.1 выполнены, то необх. усл-е (2.6)

оказывается достаточным для того, чтобы эл-т $y \in H$ был решением вариационной проблемы (2.5).

Опишем один метод построения минимизирующей по-ти. Пусть H — гильбертово пространство,

$\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — базис в H . Обозначим

$$H_m = \text{Lin}(e_1, \dots, e_m),$$

тогда $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_m \subset \dots$ — флаг.

Рассмотрим конечномерную вариационную проблему

$$E(u) \rightarrow \min, u \in H_m. \quad (2.7)$$

Положим разложение $u = \sum_{j=1}^m c_j e_j$ в функционал энергии, получим ф-ию, зависящую от $c = (c_1, \dots, c_m)^T$:

$$E_m(c) = c^T G c - 2 c^T b,$$

где $G = (s(e_i, e_j))_{i,j=1}^m$ — матрица Грама базисных элементов относительно согласованного скалярного произведения, $b = (\langle e, e_1 \rangle, \dots, \langle e, e_m \rangle)^T$. Т.о., задача (2.7) эквивалентна $E_m(c) \rightarrow \min, c \in \mathbb{R}^m$.

Т.к. матрица Грама положительно определена, $\exists! c^{(m)} = \arg \min_{c \in \mathbb{R}^m} E_m(c)$.
 Из необходимого условия экстремума следует, что $c^{(m)} = G^{-1}b \Rightarrow$ решение задачи (2.7) имеет вид

$$u^{(m)} = c_1^{(m)} e_1 + \dots + c_m^{(m)} e_m.$$

Построили последовательность Рунца $\{u^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Покажем, что она минимизирует функционал энергии.

Утверждение 2.3. Пусть H -сепарабельное гильбертово пр-во, $E(u) = S(u, u) - 2\langle \ell, u \rangle$ - ф-л энергии, где S - симметричное скалярное произведение, $\ell \in H^*$.
 Тогда пош-ть Рунца $\{u^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ минимизирующая.

Доказательство. Имеем $E(u^{(1)}) \geq E(u^{(2)}) \geq \dots$

Т.к. $u^{(m)} = \arg \min_{u \in H_m} E(u)$ и $H_1 \subset H_2 \subset \dots$

из определения базиса следует, что

$\forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N} \exists c'_1(\varepsilon), \dots, c'_m(\varepsilon)$

$\| \hat{u} - \tilde{u}^{(m)}(\varepsilon) \| \leq \varepsilon$, где $\hat{u} = \arg \min_{u \in H} E(u)$

(экстремаль $\exists u!$ по теореме 2.1),
 $\tilde{u}^{(m)}(\varepsilon) = c'_1(\varepsilon)e_1 + \dots + c'_m(\varepsilon)e_m$. Имеем
 оценку $E(\tilde{u}^{(m)}(\varepsilon)) - E(\hat{u}) = \|\tilde{u}^{(m)}(\varepsilon)\|'^2 - \|\hat{u}\|'^2 - 2 \langle \ell, \tilde{u}^{(m)}(\varepsilon) - \hat{u} \rangle \leq$
 $\leq (\|\hat{u}\|' + \alpha \varepsilon)^2 - \|\hat{u}\|'^2 + 2\|\ell\|^* \varepsilon \leq$
 $\leq 2(\alpha \|\hat{u}\|' + \|\ell\|^*) \varepsilon + \alpha^2 \varepsilon^2$.

Т.к. $u^{(m)} = \arg \min_{u \in H_m} E(u)$, можем записать

$$\mu \leq E(u^{(m)}) \leq E(\tilde{u}^{(m)}(\varepsilon)) \leq \mu + 2(\alpha \|\hat{u}\|' + \|\ell\|^*) \varepsilon + \alpha^2 \varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$E(u^{(m)}) \rightarrow \mu \text{ при } m \rightarrow \infty \quad \blacksquare$$

Замечание. В методе Рунга, выбрав базис $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в H , желательно его ортогонализировать по Грэм-Шмидту в смысле скалярного произведения $S(\cdot, \cdot)$, чтобы потом не было проблем с обращением m -ых G (если задача (2.7) решается точным методом)

1.1. Функционал энергии задачи Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле (2.3) для ур-ия с дивергентным эллиптическим оператором (2.2):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u = f(x), x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.8)$$

Составим ей функционал энергии

$$E_D(u) = S_L(u, u) - 2 \int_{\Omega} f(x)u \, dx, \quad (2.9)$$

где $S_L(u, v) = \int_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) \, dx -$
симметрическая билинейная форма,
ассоциированная с оператором L .

утверждение 2.4. Предположим, что
ф-л энергии (2.9) имеет глобальную
экстремаль $\hat{u}$, доставляющую ему
минимум на мн-ве

$$\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \varphi\},$$

причём $\hat{u} \in H^2(\Omega)$. Тогда $\hat{u}$ — сильное
решение задачи (2.8).

Доказательство. Условия утв. 2.4 отличаются от ситуации утв. 2.2 о необходимом усл-ии экстремали, но, легко видеть, что аналогичные рассуждения приводят к следующему результату:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad s_L(\hat{u}, v) - (f, v)_{L_2(\Omega)} = 0$$

или в явном виде

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla v + c(x) u v) dx - \int_{\Omega} f(x) v dx = 0.$$

Т.к. $\hat{u} \in H^2(\Omega)$, возможно применить ф-лу интегрирования по частям (или первого ф-лу Грина): $\int_{\Omega} (L \hat{u} - f(x)) v dx = 0$ (интеграл по $\partial\Omega$ исчезает, поскольку $v|_{\partial\Omega} = 0$). По лемме Дюбуа-Реймона $L \hat{u} = f(x)$ $\square$

Вместо ф-ла (2.9) можно взять модифицированный ф-л энергии задачи Дирихле (2.8)

$$\tilde{E}_0(u) = E_0(u) + \int_{\partial\Omega} |Tu - \varphi|^2 ds.$$

Нетрудно показать, что экстремаль
 ф-ла $\tilde{E}_R$ на $H^1(\Omega)$ совпадает с
 экстремалью ф-ла (2.9) на $T^{-1}\Psi$ в $H^1(\Omega)$.

1.2. Функционал энергии задачи Робена

Рассмотрим внутреннюю задачу
 Робена (2.4) для ур-ия с дивергентным
 эллиптическим оператором (2.2):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u = f(x), x \in \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + b(x)u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.10)$$

Свяжем с этой задачей ф-л энергии
 вида

$$\begin{aligned} E_R(u) = & \int_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla u + c(x)u^2) dx - \\ & - 2 \int_{\Omega} f(x)u dx - 2 \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u|_{\partial\Omega} dS. \end{aligned} \quad (2.11)$$

По-прежнему $S_L(u, v) = \int_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla v +$
 $+ c(x)uv) dx$ — симметрическая били-

нейная форма, ассоциированная с оператором L . Введём также обозначения

$$\tilde{S}(u, v) = S_L(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u |_{\partial\Omega} v |_{\partial\Omega} dS,$$

$$\langle l, u \rangle = \int_{\Omega} f(x) u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) u |_{\partial\Omega} dS,$$

Тогда ф-л (2.11) можно представить в виде $E_R(u) = \tilde{S}(u, u) - 2\langle l, u \rangle$.

Утверждение 2.5. Пусть ф-л энергии (2.11) имеет глобальную экстремаль $\hat{u}$, которая составляет ему минимум на $H^1(\Omega)$, причём $\hat{u} \in H^2(\Omega)$. Тогда $\hat{u}$ есть сильное решение задачи (2.10).

Другими словами, задача Робена (2.10) соответствует вариационная проблема

$$E_R(u) \rightarrow \min, u \in H^1(\Omega).$$

Доказательство. Необходимое условие из утверждения 2.2 даёт

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \tilde{S}(\hat{u}, v) - \langle l, v \rangle = 0.$$

В явном (интегральном) виде:

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla v + c(x) \hat{u} v) dx + \int_{\partial \Omega} b(x) \cdot \quad (2.12)$$

$$T \hat{u} T v ds - \int_{\Omega} f(x) v dx - \int_{\partial \Omega} \varphi(x) T v ds = 0.$$

Преобразуем интеграл от $A(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla v$:

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla v dx = \int_{\partial \Omega} (A(x) \nabla \hat{u} \cdot \vec{n}) v ds - \int_{\Omega} v \operatorname{div} (A(x) \nabla \hat{u}) dx. \quad \text{Тогда } (2.12)$$

можно переписать так:

$$\int_{\Omega} (L \hat{u} - f(x)) v dx + \int_{\partial \Omega} [A(x) \nabla \hat{u} \cdot \vec{n} + b(x) \hat{u} - \varphi(x)] v ds = 0. \quad (2.13)$$

а) Имеем для любой $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (L \hat{u} - f(x)) v dx = 0. \quad \text{По лемме}$$

Дюбуа-Реймона $L \hat{u} = f$.

б) Пусть $\varphi \in C^\infty(\partial \Omega)$. По теореме

1.14 о тонком поднятении $\forall \varepsilon > 0$

$\exists v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ со свойствами:

1) $v_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \psi$; 2) $\text{supp } v_\varepsilon \subseteq \bar{Q}_\varepsilon$, где $Q_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$; 3) $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Опустим при $v = v_\varepsilon$ интеграл по Ω в (2.13):

$$\left| \int_{\Omega} (A \hat{u} - f(x)) v_\varepsilon dx \right| = |(A \hat{u} - f, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}| \leq \|A \hat{u} - f\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \text{ Нер-во К-Б-Ш}$$

Следовательно, предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ в ф-ле (2.13) при $v = v_\varepsilon$ даёт $\int_{\partial\Omega} [A(x) \nabla \hat{u} \cdot \vec{\nu} + b(x) \hat{u} - \psi(x)] \psi dS = 0$ для любой $\psi \in C^\infty(\partial\Omega)$. По лемме Дюбуа-Реймона (версия для компактных гиперповерхностей класса C^1)

$$A(x) \nabla \hat{u} \cdot \vec{\nu} + b(x) \hat{u} |_{\partial\Omega} = \psi \quad \blacksquare$$

§ 3. Сильные и обобщённые решения краевых задач

Вернёмся к задачам (2.3) и (2.4) для общего равномерно эллиптического

оператора второго п-ка (2.1). Ещё раз выпишем условия на коэфф-ты:

- $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, n$;
- $\exists \gamma > 0 \forall x \in \bar{\Omega} \forall \xi \in \mathbb{R}^n \xi^T A(x) \xi \geq \gamma |\xi|^2$
(равномерная эллиптичность);
- $c \in C(\bar{\Omega})$, $b \in C(\partial\Omega)$.

Обозначим граничный оп-р задачи через $\mathcal{B}$, а саму задачу — $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$:

- 1) для задачи Дирихле $\mathcal{B} = T$ — оп-р следа;
- 2) для задачи (2.4) $\mathcal{B}u = A(x) \nabla u \cdot \vec{n} + b(x)u|_{\partial\Omega}$.

Рассмотрим оп-р

$L: H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \oplus H^s(\partial\Omega)$,
сопоставляющий ф-ии $u \in H^2(\Omega)$
пару $(\mathcal{L}u, \mathcal{B}u) \in L_2(\Omega) \oplus H^s(\partial\Omega)$,
где $s = \frac{3}{2}$ для задачи Дирихле,
 $s = \frac{1}{2}$ для задачи Робена.

Определение 2.3. Сильным решением
краевой задачи $\{2, 3\}$ (Дирихле
(2.3) или Робена (2.4)) с правыми
частями $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^s(\partial\Omega)$ называ-
ется φ -я $u \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющая
операторному ур-ию
$$Lu = (f, \varphi).$$

Теория сильных решений краевых
задач (в т.ч. задач (2.3) и (2.4))
изложена в

- [3] Ж.-Л. Лионс, Э. Магженис.
Неоднородные граничные задачи и
их приложения. М.: Мир, 1971.
- [4] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.
Линейные и квазилинейные
уравнения эллиптического типа.
М.: Наука, 1973.

Сильные решения $\rightarrow$ обобщённые
решения.