

Лекция #5

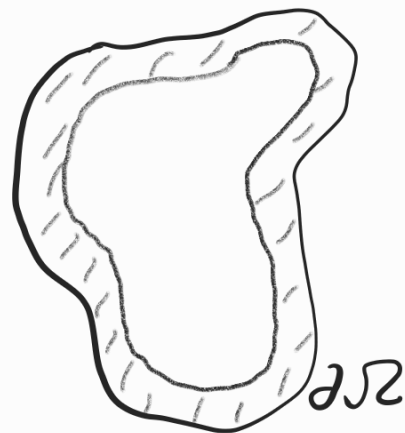
Тема 1 "Пространства С. Л. Соболева"

Теорема 1.14 (теорема о точном
поднятии). Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$,
 $\varepsilon > 0$; обозначим

$$Q_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}.$$

Тогда $\forall \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \exists u \in H^1(\Omega)$
с св-ми: 1) $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ (u — поднятие
 φ); 2) $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$,
 $C = C(\Omega, \varepsilon)$; 3) $\text{supp } u \subset \overline{Q_\varepsilon}$;
4) $\|u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Замечание. Теорема
1.14 похожа на теорему
1.7 о продолжении: мы
в три шага (см. начало



лекции #3) строим озр. оператор поднятия $L: H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, являющийся сечением он-ра следа $T: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$. При док-ве теоремы 1.13 о корректности по Адамару задачи Дирихле (1.14) пп. 3) и 4) не нужны; но они необходимы для вывода условия Робена, которому удовл. экстремаль ф-ла энергии с квадратичным граничным членом (см. тему 2).

§7. Теорема об эквивалентности норме пр-ва Соболева $H^1(\Omega)$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Рассмотрим ф-ии $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_{ij} = a_{ji}$, $c \in C(\bar{\Omega})$, $b \in C(\partial\Omega)$ и построим в $H^1(\Omega)$ билинейную симм. форму

$$s(u, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} c(x) uv \, dx + \int_{\partial\Omega} b uv \, dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} b(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} dS, \quad (1.17)$$

где $A(x) \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$.

Если взять $A(x) \equiv E$, $c(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$, то форма (1.17) будет стандартным скалярным произведением в $H^1(\Omega)$.

Теорема 1.15. Пусть выполнены условия:

- (i) м-ца A равномерно положительно определена в $\bar{\Omega}$, т.е. $\exists \gamma > 0$
 $\forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \xi^T A(x) \xi \geq \gamma |\xi|^2$;
- (ii) $\forall x \in \bar{\Omega} \quad c(x) \geq 0$ и $\forall x \in \partial\Omega \quad b(x) \geq 0$;
- (iii) $c \not\equiv 0$ или $b \not\equiv 0$.

Тогда форма (1.17) задаёт скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме ч-ва Соболева.

Доказательство. Очевидно, что если выполнены условия (i), (ii) и (iii), то (1.17) — полу(прес?) скалярное произведение в $H^1(\Omega)$. Обозначим $\|u\|' = \sqrt{s(u, u)}$; $\|\cdot\|'$ — полунорма в $H^1(\Omega)$.

1) Покажем, что $\exists \alpha > 0 \forall u \in H^1(\Omega)$ $\|u\|' \leq \alpha \|u\|$, где $\|\cdot\|$ — станд. норма в $H^1(\Omega)$ (полунорма $\|\cdot\|'$ подчинена стандартной норме). Действительно,

$$\begin{aligned} \|u\|'^2 = s(u, u) &= \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \\ &+ \int_{\Omega} c(x) |u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} b(x) |Tu|^2 \, ds \leq \\ &\leq \gamma \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \max_{\bar{\Omega}} c \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \\ &+ \max_{\partial\Omega} b \|Tu\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \leq \alpha^2 \|u\|^2, \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha^2 = \max \left\{ \gamma, \max_{\bar{\Omega}} c \right\} + \|T\|^2 \max_{\partial\Omega} b.$$

2) Покажем теперь, что $\exists \beta > 0$ $\forall u \in H^1(\Omega)$ $\|u\| \leq \beta \|u\|'$.

Предположим противное: $\forall j \in \mathbb{N}$
 $\exists u_j \in H^1(\Omega) \quad \|u_j\|^2 > j s(u_j, u_j)$.

Положим $v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$, тогда $\forall j \in \mathbb{N}$

$\|v_j\| = 1$ и $s(v_j, v_j) < \frac{1}{j}$. Из

последнего неравенства вытекает, что

$$\frac{1}{j} > \int_{\Omega} A(x) \nabla v_j \cdot \nabla v_j \, dx \geq \gamma \int |\nabla v_j|^2 \, dx,$$

$$\int_{\Omega} c(x) |v_j|^2 \, dx < \frac{1}{j}, \quad \int_{\partial\Omega} b(x) |\nabla v_j|^2 \, ds < \frac{1}{j}.$$

По теореме 1.11 о компактности
из посл-ти $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно выделить
фундаментальную в $L_2(\Omega)$ подпослед-ть.
Не умаляя общности, будем считать,
что сама посл-ть $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ фундамен-
тальна в $L_2(\Omega)$ и, следовательно,
имеет предел в $L_2(\Omega)$.

$$\text{Но тогда } \|v_i - v_j\|^2 = \|v_i - v_j\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla(v_i - v_j)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|v_i - v_j\|_{L_2(\Omega)}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \| |\nabla v_i| \|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \| |\nabla v_j| \|_{L_2(\Omega)}^2 \\
& \leq \| v_i - v_j \|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\gamma_i} + \frac{2}{\gamma_j} \rightarrow 0 \\
& \text{при } i, j \rightarrow \infty \Rightarrow \{v_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ —} \\
& \text{фундаментальная послед-ть в } H^1(\Omega), \\
& v = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j \text{ — её предел в } H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

делаем предельный переход в
неравенствах: $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0, \quad (1.18)$

$$\int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx = 0, \quad \int_{\partial\Omega} b(x) |\nabla v|^2 ds = 0.$$

Кроме того, $\forall j \in \mathbb{N} \quad \|v_j\| = 1 \Rightarrow \|v\| = 1$. Отсюда, учитывая первое рав-во из смысла (1.18),
вытекает, что $v(x) = \text{const} = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} > 0$
для п.в. $x \in \Omega$. Но тогда из второго
рав-ва (1.18) имеем $c(x) \equiv 0$, а из
третьего рав-ва (1.18) следует $b(x) \equiv 0$,
что противоречит (iii) усл-ий теоремы 

Следствие 1.1 (пер-во Фридрихса).

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, тогда

$\exists C = C(\Omega) > 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$(1.19) \quad \int_{\Omega} u^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Доказательство. Возьмём $A(x) \equiv E$,

$c(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 1$, тогда форма (1.17),

принявшая вид $s(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx +$

$+ \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} dS$, будет по теореме

1.15 скалярным произведением в $H^1(\Omega)$,

порождающим норму, эквивалентную

стандартной: $\exists \alpha = \alpha(\Omega) > 0$, $\beta = \beta(\Omega) > 0$

$\forall u \in H^1(\Omega) \quad \beta^{-2} \|u\|^2 \leq \|u\|'^2 \leq \alpha^2 \|u\|^2$.

Для ф-ий $u \in H_0^1(\Omega)$, имеющих

нулевой след на границе, явным вид

левого пер-ва

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx \leq \beta^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

$\Rightarrow$ (1.19) с $C = \beta^2 - 1$ (очевидно, что $\beta > 1$) $\blacksquare$

Замечание: можно показать, что за константу C в нер-ве Фридрихса можно взять $\text{diam}(\Omega)^2$.

Доказательство теоремы 1.13.

По теореме 1.14 о поднятении
 $\exists w = L\varphi$, где $L: H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ —
ограниченный оператор поднятия
($w|_{\partial\Omega} = \varphi$). Положим $u_0 = u - w$.

Тогда u — обобщ. решение задачи
Дирихле (1.14) $\Leftrightarrow \varphi$ -я $u_0 \in H_0^1(\Omega)$
удовлетворяет $\forall v \in H_0^1(\Omega)$
интегральному равенству

$$(1.20) \quad (u_0, v)' = -(w, v)' - \int_{\Omega} f(x)v dx,$$

$$\text{где } (u_0, v)' = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx - \text{скаляр-}$$

ное произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной.

Обозначим л.н. ф-л в правой части (1.20) через ℓ и оценим
 еѐ норму: пер-во $K-B-U$

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq |(w, v)'| + |(f, v)_{L_2(\Omega)}| \leq \\ &\leq \|w\|' \|v\|' + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq (\alpha \|w\| + \|f\|_{L_2(\Omega)} \beta) \|v\|' \leq \\ &\leq (\alpha \|L\| \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \beta \|f\|_{L_2(\Omega)}) \|v\|' \\ &(\|\cdot\| - \text{стандартная норма в } H^1(\Omega), \\ &\|v\|'^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx, \|v\|' \leq \alpha \|v\|, \\ &\|v\| \leq \beta \|v\|'). \end{aligned}$$

Теорема Рисса (для гильбертова пр-ва)
 Пусть H - гильбертово пр-во, $\ell \in H^*$
 (ℓ - озр. л.н. ф-л на H), тогда

$\exists! u_e \in H \quad \forall v \in H \quad l(v) = (u_e, v)$.
 Кроме того, $\|e\|_{H^*} = \|u_e\|_H$. Т.о.,
 между H и H^* возникает естествен-
 ный линейный изоморфизм Рисса.

Применим т. Рисса к ор. ф-лу
 l из правой части (1.20):
 $\exists u_e \in H_0^1(\Omega) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad l(v) = (u_e, v)$.
 Тогда из (1.20), справедливого для
 всех $v \in H_0^1(\Omega)$, будет следовать, что
 $u_e = u_0$. Также из т. Рисса получим
 $\|u_0\|' = \|e\| \leq \alpha \|L\| \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \beta \|f\|_{L_2(\Omega)}$
 Остался вывод априорной оценки (1.6):
 $\|u\| \leq \|u_0\| + \|w\| \leq \beta \|u_0\|' + \|L\| \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq$
 $\leq (1 + \alpha\beta) \|L\| \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \beta^2 \|f\|_{L_2(\Omega)}.$

Итак, можно положить

$$C = \max \{ (1 + \alpha\beta) \|L\|, \beta^2 \} \quad \square$$

§8. Теорема вложения Соболева

Теорема 1.16 (1D теорема вложения С.Л. Соболева). Пусть $(a, b) \in \mathbb{R}$. Тогда пр-во $H^1(a, b)$ компактно вложено в $C[a, b]$.

Доказательство. 1) Легко проверить, что $\forall \varphi \in C_0^1[a, b]$ справедливо интегральное представление

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-s) \varphi'(s) ds, \quad (1.21)$$

$x \in [a, b]$ ($E(x-s) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-s)$ — фунг. решение оп-ра первой производной). Из (1.21) следует, что $\forall x \in [a, b] \quad |\varphi(x)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{b-a} \|\varphi'\|_{L_2(a,b)}$
 $\Rightarrow \|\varphi\|_{C[a,b]} \leq \frac{1}{2} \sqrt{b-a} \|\varphi'\|_{L_2(a,b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{b-a} \|\varphi\|_{H^1(a,b)}.$

2) Пусть теперь $\varphi \in C^1[a, b]$, $(a, b) \subset (a', b') \in \mathbb{R}$. Существует оп-р

Финитного продолжения

$H^1(a, b) \rightarrow H^1(a', b')$ [1D версия
Теоремы 1.7 о финитном продолжении].
Обозначим $\Phi(a', b') \in \Phi$ — продолжение
функции $\varphi \in C^1[a, b]$ и запишем

$$\|\varphi\|_{C[a, b]} \leq \|\Phi\|_{C[a', b']} \leq \frac{1}{2} \sqrt{b' - a'}. \\ \|\Phi\|_{H^1(a', b')} \leq \frac{1}{2} \sqrt{b' - a'} C \|\varphi\|_{H^1(a, b)},$$

где C — некоторая константа, не
зависящая от φ (например, норма
оператора продолжения).

3) Для произвольной ф-ии $u \in H^1(a, b)$
найдем последовательность $C^1[a, b] \rightarrow$
 $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$, сходящуюся к u по норме
кр-ва Соболева. Имеем

$$\|\varphi_i - \varphi_j\|_{C[a, b]} \leq \frac{1}{2} \sqrt{b' - a'} C \|\varphi_i - \varphi_j\|_{H^1(a, b)} \\ \Rightarrow \exists \varphi = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j \in C[a, b]. \quad \downarrow i, j \rightarrow \infty \\ 0.$$

Но тогда $u = \varphi$ п.в. на $[a, b]$.

Т.о., имеет место вложение

$J: H^1(a, b) \rightarrow C[a, b]$, причём оп-р вложения J , очевидно, линейный и ограниченный: $\exists C_0 > 0 \forall u \in H^1(a, b)$ справедливо нер-во Соболева вида

$$(1.22) \|u\|_{C[a, b]} \leq C_0 \|u\|_{H^1(a, b)}.$$

4) Докажем, что J — компактный оператор. Для $\forall \varphi \in C^1[a, b]$ и $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ из ф-лы Ньютона-Лейбница $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(x) dx$ вытекает

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq \sqrt{|x_2 - x_1|} \|\varphi'\|_{L_2(a, b)}.$$

Повторяя рассуждения из предыдущих пунктов, получим, что $\forall u \in H^1(a, b)$, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ справедливо нер-во

$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq C_1 \sqrt{|x_2 - x_1|} \|u\|_{H^1(a, b)}.$$

Последнее означает, что каждая

Ф-ия $u \in H^1(a, b)$ не только непре-
рывна, но и удовлетворяет условию
Гёльдера с показателем $1/2$: $u \in C^{1/2}[a, b]$.

5) Пусть $S \subset H^1(a, b)$ — ограничен-
ное мн-во, т.е. $\exists C_2 > 0 \forall u \in S$
 $\|u\|_{H^1(a, b)} \leq C_2$. Тогда $\forall u \in S$
 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq C_1 C_2 \sqrt{|x_2 - x_1|}. \quad (1.23)$$

Из нер-ва (1.23) следует, что
семейство ф-ий S равностепенно
непрерывно: $\forall \varepsilon > 0 \forall u \in S \forall x_1, x_2 \in [a, b]$

т.ч. $|x_2 - x_1| < \delta = \frac{\varepsilon^2}{C_1^2 C_2^2}$ верно не-
равенство $|u(x_2) - u(x_1)| < \varepsilon$. Из 10
нер-ва Соболева (1.22) очевидно
является, что S — ограниченное
мн-во в $C[a, b]$. Но тогда по
теореме Арцела S предкомпактно
в $C[a, b] \Rightarrow \mathcal{J}$ -компактный оп-р $\blacksquare$

Теорема 1.17 (теорема вложения
С.Л. Соболева). Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$,
 $\partial\Omega \in C^{k+[\frac{n}{2}]+1}$. Тогда пр-во
 $H^{k+[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)$ компактно вложено
в $C^k(\bar{\Omega})$.

Замечания. 1) При $k=0$ имеем
компактное вложение
 $\gamma: H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$: $\exists C_0 > 0$
 $\forall u \in H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)$ выполнено нер-во
Соболева $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}$.
2) Есть док-во теоремы 1.17, аналогич-
ное представленному док-ву теоремы
1.16, отягощенные сложными техни-
ческими деталями (см. [13]).
3) Существует более простое док-во
теоремы 1.17, основанное на преобра-
зовании Фурье и его св-вах (см. [2]).