

Лекция #4

Тема 1 "Пространства С. Л. Соболева"

§6. Оператор следа и пространство следов

Возьмём пр-во $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) = \mathcal{U}$,
которое мы использовали для оп-я
классического решения внутренней
задачи Дирихле для ур-ия Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

В краевом условии Дирихле
используется оператор следа

$\gamma|_{\partial\Omega} = T: \mathcal{U} \rightarrow C(\partial\Omega)$, хорошо опре-
делённый на пр-ве $\mathcal{U}$. Мы хотим
определить оп-р следа для пр-ва
Соболева $H^1(\Omega)$, но оно состоит из

элементов $L_2(\Omega)$, имеющих о.н. первого н-ка, а пр-во Лебега составляют классы эквивалентных ф-ий, поэтому $u|_{\partial\Omega}$, если $\partial\Omega \in C^1 \Rightarrow$ $\text{mes}_n(\partial\Omega) = 0$, не определено.

С другой стороны, по теореме 1.9 $C^\infty(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $H^1(\Omega)$ при $\partial\Omega \in C^1$, так что у нас есть оператор $T: C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$, заданный на всюду плотном подпр-ве в $H^1(\Omega)$.

Если мы докажем его ограниченность (непрерывность) в смысле норм $H^1(\Omega)$, $L_2(\partial\Omega)$, то сможем продолжить оператор по непрерывности.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности). Пусть N — нормированное пр-во, N_0 — его плотное подпр-во, B — банахово пр-во, $T_0: N_0 \rightarrow B$ — ограниченный оператор. Тогда $\exists$ единственный ограниченный оператор $T: N \rightarrow B$, продолжающий T_0 , т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N_0 & & T_0 \\ \downarrow i & \searrow & \downarrow \\ N & \xrightarrow{T} & B \end{array}$$

где $i: N_0 \rightarrow N$ — естественное вложение.

При этом $\|T\| = \|T_0\|$.

Лемма 1.6 (Соболевская ограниченность
оп-ра следа). Существует константа
 $C > 0$, что для всех $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$(1.12) \quad \|u|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Доказательство. Граница $\partial\Omega$
представима в виде объединения
конечного числа простых кусков
 $S_j: \partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N S_j$, где

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n: x_{k_j} = \varphi_j(x'), x' \in D_j\},$$

$$x = (x_1, \dots, \hat{x}_{k_j}, \dots, x_n), \quad D_j \subset \mathbb{R}^{n-1} -$$

область, $\varphi_j \in C^1(\bar{D}_j)$. Поместим $\bar{\Omega}$
в куб K_a , тогда все D_j окажутся
лежащими в соответствующих $(n-1)$ -
мерных сторонах куба со стороной $2a$.

Считаем, что ф-ии $u \in C^1(\bar{\Omega})$
уже продолжены в K_a ф-ии из $C_0^1(K_a)$.
Поэтому берём произвольную ф-ию
 $u \in C_0^1(K_a)$ и рассматриваем её

ограничение $u|_{S_j}$ на $S_j, j=1, \dots, N$.
 Для краткости предположим, что
 $K_j = K$ и $\varphi_j = \varphi \Rightarrow u|_{S_j} = u(x', \varphi(x'))$,
 $x' \in D_j$. Воспользуемся ф-ой Ньютона-
 Лейбница:

$$u(x) = u(x', \varphi(x')) = \int_{-\alpha}^{\varphi(x')} u_{x_n}(x', \xi) d\xi.$$

Отсюда $|u(x)|^2 \leq 2\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} |u_{x_n}(x', \xi)|^2 d\xi$,
 $x \in S_j$. Умножая последнее пер-во
 на $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \dots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ и интегри-
 рую по D_j , приходим к пер-ву

$$\int_{D_j} |u(x', \varphi(x'))|^2 \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \dots + \varphi_{x_{n-1}}^2} dx' \leq$$

$$\leq C_1 \int_{K_\alpha} |u_{x_n}|^2 dx \Rightarrow \|u|_{S_j}\|_{L_2(S_j)}^2 \leq$$

$$\leq C_1 \|u_{x_n}\|_{L_2(K_\alpha)}^2 \leq C_1 \|u\|_{H^1(K_\alpha)}^2 \leq$$

$$\leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (\text{константы } C_1, C_2$$

не зависят от φ -и, но зависят
 от φ и от оператора продолжения
 $H^1(\Omega) \rightarrow H^1(K_\alpha)$). Суммируя

по $j = 1, \dots, N$, получим кер-во (1.12) 

Теорема 1.12 (об операторе следа). Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, тогда $\exists!$ ограниченный оператор следа $\gamma_\Omega = T: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$, продолжающий классический оператор $T_0: C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$.

Доказательство - упражнение (лемма 1.6 и принцип продолжения по непрерывности)

Итак, мы построили оп-р следа

$$T: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega).$$

Изучим его св-ва. Прежде всего рассмотрим ядро оп-ра T и обозначим его как $H_0^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = \text{Ker } T = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Утверждение 1.6. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$,

$\partial\Omega \in C^1$, тогда $H_0^1(\Omega)$ есть

замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$.

$\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$ очевидно, в обратную сторону надо доказывать (см. [1]).

Определение 1.5. Пространством следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$ называется образ оп-ри следа $T: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$:

$H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{Im } T = \{\varphi \in L_2(\partial\Omega) : \exists u \in H^1(\Omega) \text{ и } u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$. В пр-ве

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ вводится норма по формуле

$$(1.13) \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi}} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Упражнения

- 1) Доказать, что (1.13) действительно задаёт норму в пр-ве следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (на W).
- 2) Доказать, что $H^{1/2}(\partial\Omega)$ — банахово пр-во (на W).

На самом деле $H^{1/2}(\partial\Omega)$ —
миллертово пр-во, а норма (1.13)
эквивалентна стандартной мил-
бертовой норме. Непосредственное
определение скал. произведения
в $H^{1/2}(\partial\Omega)$ довольно сложное.

Очевидны вложения

$$H^1(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega).$$

В теории интерполяции мил-
бертовых пространств промежу-
точное пр-во $H^{1/2}(\partial\Omega)$ может
быть определено так:

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = [$$

(см. Ж.-Л. Лионс, Э. Магжenes.

Неоднородные граничные
задачи и их приложения.

М.: Наука, 1971.

В одном случае пр-во $H^{1/2}(\partial\Omega)$ описать довольно просто — это когда $\Omega = \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — стандартный диск, $\partial\Omega = \mathbb{T}$ — стандартная окружность. Положим

$$H^s(\mathbb{T}) = \left\{ \varphi \in L_2(\mathbb{T}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2s} |\varphi_k|^2 < \infty \right\},$$

$$\text{где } \varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-ikt} dt -$$

коэф-т Фурье ф-ии φ относи-тельно стандартной тригонометри-ческого базиса $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. В

пр-ве $H^s(\mathbb{T})$ скалярное произ-ведение задаётся формулой

$$(\varphi, \psi)_{H^s(\mathbb{T})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2s} \varphi_k \overline{\psi_k}.$$

Легко видеть, что $\forall s \geq 0 \quad H^s(\mathbb{T})$ — гильбертово пр-во. Можно показать, что при $s \in \mathbb{N}$ новое определение совпадает со старым

с точностью до эквивалентности
 соответствующих норм. И так,
 пр-во следов $H^{1/2}(\mathbb{T})$, т.е. образ
 об-ра следа $T: H^1(\mathbb{D}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$,
 может быть описано как все
 такие ф-ии $\psi \in L_2(\mathbb{T})$, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |\psi_k|^2 < \infty.$$

Замечание о комплексных гильбертовых пространствах

Пусть H — векторное (линейное)
 пр-во над полем $\mathbb{C}$. Эрмитовым
 скалярным произведением в H
 называется форма

$$(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{C},$$

удовл. аксиомам:

$$1) \forall u, v, w \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$$

$$(\lambda u, v) = \lambda (u, v)$$

(линейность по 1-му множителю)

2) $\forall u, v \in H \quad (u, v) = \overline{(v, u)}$ (эрмитова симметричность)

3) $\forall u \in H, u \neq 0 \quad (u, u) > 0$
(положительная определённость).

из 1) и 2) $\Rightarrow$ эрмитово скал.
произведение антилинейно по
2-му множителю: $\forall u, v, w \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
 $(u, v + w) = (u, v) + (u, w), (u, \lambda v) =$
 $= \overline{\lambda} (u, v).$

Пример - пр-во Лебега квадра-
тно интегрируемых на Π
комплекснозначных ф-ий $L_2(\Pi)$.
эрмитово скал. пр-ие:

$$(f, g)_{L_2(\Pi)} = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Утверждение 1.7 (формулы
интегрирования по частям для
ф-ий из пр-ва Соболева).

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n, \partial\Omega \in C^1$, тогда

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \nu_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx,$$

где ν_j — j -ая координата единичной внешней нормали $\vec{\nu}$ к $\partial\Omega$, $u|_{\partial\Omega}$, $v|_{\partial\Omega}$ — следы ф-ий. Утверждение легко следует из класс. ф-лы Грина по частям (для ф-ий $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$), теоремы 1.9 о плотности ($C^1(\bar{\Omega})$ встоду плотно в $H^1(\Omega)$) и непрерывности следа $\cdot|_{\partial\Omega}: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$.

Рассмотрим в об-ти $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (1.14)$$

Цель — определить решения задачи (1.14), принадлежащие пр-ву Соболева. Самый простой способ это сделать реализуется в следующем определении.

Определение 1.6. Сильным решением (strong solution) задачи (1.14) называется ф-я $u \in H^2(\Omega)$, удовл.

1) усл-ию Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ (в смысле оп-ра следа); 2) ур-ию Пуассона $\Delta u = f$.

Определение обобщённого (слабого) решения существенно сложнее, но доказать его существование проще.

Определение 1.7. Обобщённым (слабым, mild solution) решением задачи (1.14) называется ф-я $u \in H^1(\Omega)$, удовл.: 1) усл-ию

Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi$; 2) $\forall v \in H_0^1(\Omega)$
(пробный ф-ин) интегральному
равенству

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} f(x) v \, dx. \quad (1.15)$$

Объясним происхождение инт.
Тожд-ва (1.15). Пусть $u \in H^2(\Omega)$ -
сильное решение задачи (1.14).
Из ф-лы инт-ия по частям следует
первая формула Грина

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (1.16)$$

Умножим ур-ие Пуассона, которому
удовл. сильное решение, на пробную
ф-ию $v \in H_0^1(\Omega)$ и применим (1.16).
С учётом того, что $v|_{\partial\Omega} = 0$, получим
(1.15). Последнее имеет смысл при
 $u \in H^1(\Omega)$. Т.о., сильное решение
удовл. определению 1.7, т.е. является
обобщённым.

Теорема 1.13. Пусть $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Тогда $\exists!$ $u \in H^1(\Omega)$ — обобщённое решение задачи (1.14), удовл. априорной оценке

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \quad (1.16)$$

с зависящей только от Ω константой C .

Замечание. Теорема 1.3 утв. корректность по Адамару задачи (1.14) в классе пр-в $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$, $\mathcal{F} = L_2(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial\Omega)$ и в смысле обобщённых решений. Оценка (1.16) свидетельствует об ограниченности (непрерывности) разрешающего оператора $R: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$.

Для док-ва теоремы 1.13 нам не хватает двух теорем из теории пространств Соболева. С них мы начнём следующую лекцию.