Уравнения в частных производных: весенний семестр 2024/25 уч. г.

Лекция #1

Тема 1 "Пространства С.Л. Соболева"

План

0. мотивация
1. Пр-ва Лебега
2. Обобщённые производные
3. Пространства Соболева: определение и простые свойства
4. Теорема о продолжении и её следствия
5. Теорема о компактности

6. Оператор следа и пр-во следов

7. Теорема об эквивалентной норме

8. Теорема вложения Соболева

---

§ 0. Мотивация

(повторение пом. лекции осеннего семестра)

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для ур-я Пуассона:

$$(1.1)\quad \begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Предполагается, что $\partial\Omega \in C^1$.

Сопоставим задаче (1.1) ф-ю энергии

$$(1.2)\quad E_D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\int_\Omega f(x) u\, dx$$

и вариационную проблему

$$(1.3)\quad E(u) \to \min,\ u \in \mathcal{U},$$

где $\mathcal{U} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Несложно док-ть следующее утверждение (мы это сделали на лок. лекции осен. семестра)

Утверждение 1.1. Пусть $u^* \in \mathcal{U}$, $u^* \in C^2(\bar{\Omega})$ – решение (1.3) (экстремаль), тогда u^* – решение задачи (1.1).

А существует ли экстремаль? Рассмотрим абстрактный ф-л энергии

$$E(u) = (u,u) + 2\langle l, u\rangle, \quad (1.4)$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное

произведение в гильбертовом пр-ве H, $\ell \in H^*$ (лин. огр. ф-л). Тогда верна

Теорема 1.1. Вариационная проблема

$$\Xi(u) \to \min, \quad u \in H \qquad (1.5)$$

имеет единственное решение $\hat{u} \in H$.

Замечания 1) Теорема 1.1 была доказана на лекции осеннего семестра.

2) Экстремаль $\hat{u}$ удовл. необходимому условию

$$\forall v \in H \quad (u, v) + \langle \ell, v \rangle = 0.$$

Вопрос: можно ли применить теорему 1.1 для функ-ла (1.2)?

• $(u,v)_{\mathcal{U}} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ — скалярное произведение в $\mathcal{U}$ (упражнение);

• Оценим лин. функционал

$$\langle l, u \rangle = \int_\Omega f(x) u \, dx \; : \text{ нер-во К-Б-Ш} \downarrow$$

$$|\langle l, u \rangle| = \left| \int_\Omega f(x) u \, dx \right| \leq$$

$$\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \overset{\text{нер-во Фридрихса}}{\leq}$$

$$\leq C(\Omega) \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{U}},$$

где $\|u\|_{\mathcal{U}} = \sqrt{(u,u)_{\mathcal{U}}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow l \in \mathcal{U}^* \mathcal{U}$

• Проблема: пр-во $\mathcal{U}$ НЕ гильбертово!

В корне следующая проблема:
$C L_2(\bar{\Omega})$ – пр-во непр.
в $\bar{\Omega}$ ф-ий со скалярным произведением

$$(1.6)\quad (u,v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)\,dx$$

не полное! Его пополнение можно описать с помощью теории меры и лебеговой теории интегрирования.
Результат: $L_2(\Omega)$ – пр-во квадратично интегрируемых по Лебегу в об-ти Ω ф-ий (по-прежнему $\partial\Omega \in C^1$, чтобы не было проблем с границей).
Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ определяется той же формулой (1.6).

• $L_2(\Omega)$ – гильбертово пр-во (доказано в ФАНе)

• $C L_2(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ – в силу плотное вложение (докажем в следующем параграфе) $\Rightarrow$ $L_2(\Omega)$ – пополнение $C L_2(\overline{\Omega})$.

Замечания

1) Концептуальное определение: пополнение – это функтор $Norm_1 \to Ban_1$ из категории норм. пр-в и сжимающих оп-ов (с нормой ≤ 1) в категорию банаховых пр-в и сжимающих оп-в, сопряжённый слева к функтору забвения $Ban_1 \to Norm_1$ (упражнение: сформулируйте определение пополнения, не используя язык теории категорий)

2) Пополнение норм. пр-ва $(N, \|\cdot\|_N)$ может быть получено как замыкание образа N при каноническом вложении $J: N \to N^{**}$: $(\overline{\mathrm{Im} J}, \|\cdot\|_{N^{**}})$.

3) Пополнение сохраняет структуру <u>пучка</u>, но, вообще говоря, не сохраняет функциональную природу: эл-ты пр-ва $L_2(\Omega)$ – не функции, но классы эквивалентных ф-ий (изм-ые ф-ии $u, v: \Omega \to \mathbb{R}$ эквивал., если $u - v = 0$ п.в. в Ω).

§1. Пространства Лебега

$p \geq 1$, $L_p(\Omega)$ состоит из (классов эквивалентных) измеримых в Ω ф-ий т.ч. $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$ (интеграл Лебега);

$$\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

если понятно, о какой об-ти идёт речь

1) Если $p = \infty$, то

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u|$$

существенный супремум

Замечание

Далее $1 \leq p < \infty$, Ω – ограниченная область.

2) Если $p=2$, то норма ассоциирована со скалярным произведением

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

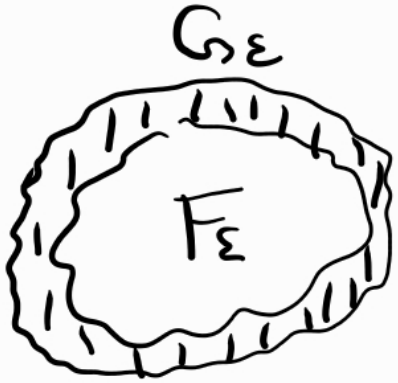
Замечание: нер-во треугольника для $\|\cdot\|_p$ – интегральное нер-во Минковского; прочие аксиомы нормы очевидны.

В ФАНе было доказано, что $L_p(\Omega)$ – банахово (гильбертово в случае $p=2$) пр-во.

Теорема 1.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$, тогда $C(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $L_p(\Omega)$.

Док-во. 1) Пусть $\Omega \supset M$ – измеримое мн-во, $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \Omega \setminus M \end{cases}$ – характеристическая (индикаторная) ф-я. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in C(\Omega)$: $\|\varphi - \chi_M\|_p < \varepsilon$.

Из конструкции меры Лебега $\Rightarrow \exists F_\varepsilon \subset \Omega$ – замкнутое (в топологии Ω) мн-во, $\exists G_\varepsilon \subset \Omega$ – открытое мн-во со св-ми: $F_\varepsilon \subset M \subset G_\varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon^p$. Введём ф-ю



$$\varphi(x) = \frac{d(x, \Omega \setminus G_\varepsilon)}{d(x, \Omega \setminus G_\varepsilon) + d(x, F_\varepsilon)},$$

где d – метрика в $\mathbb{R}^n$.

Из непр-ти последней следует $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ $\Downarrow$ $\varphi \in C(\bar{\Omega})$

- Если $x \in \Omega \setminus G_\varepsilon$, то $\varphi(x) = 0$ (как и $\chi_M(x) = 0$)

• $x \in F_\varepsilon \Rightarrow \varphi(x) = 1$.

• $\forall x \quad |\varphi(x) - \chi_m(x)| \le 1$.

Т.о., $\|\varphi - \chi_m\|_p^p = \int\limits_\Omega |\varphi(x) - \chi_m(x)|^p dx =$

$= \int\limits_{G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon} |\varphi(x) - \chi_m(x)|^p dx \le \mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon^p$.

2) Из конструкции интеграла Лебега следует, что мн-во всех ступенчатых в Ω ф-ий всюду плотно в $L_p(\Omega)$. Ступенчатая ф-я – измеримая ф-я с конечным мн-м значений $\Leftrightarrow$ конечная лин. комбинация характ. ф-ий.

Пусть $u \in L_p(\Omega)$, для $\forall \varepsilon > 0$ найдём $S = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j \chi_{M_j}$, где $M_j = S^{-1}(\{c_j\})$ т.ч. $\|S - u\|_p < \varepsilon$.

$\chi_{M_j} \rightsquigarrow \varphi_j \in C(\bar{\Omega}) : \|\varphi_j - \chi_{M_j}\|_p < \varepsilon.$

Построим $\varphi = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j$ и оценим:

$$\|u - \varphi\|_p \le \|u - s\|_p + \|\varphi - s\|_p <$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{N} |c_j| \, \|\varphi_j - \chi_{M_j}\|_p <$$

$$< \left(1 + \sum_{j=1}^{N} |c_j|\right) \varepsilon \quad \blacksquare$$

Вспомним теорему из мат. анализа: ф-я, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём. Оказывается, что существует аналогичное св-во ф-ий из $L_p(\Omega)$.

Теорема 1.3. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$. Тогда ф-я $u \in L_p(\Omega)$ непрерывна в L_p-среднем: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

(1.6) $\|u(\cdot+z)-u(\cdot)\|_p < \varepsilon$ для всех $z \in B_\delta$.

Замечание. В нер-ве (1.6) предполагается, что ф-я u продолжена нулём в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Док-во. Погрузим об-ть Ω в шар B_a. По теореме 1.2 $\exists \varphi \in C(\overline{B_{2a}})$ $\|u-\varphi\|_{L_p(B_{2a})} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Возьмём ф-ю $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со св-ми: а) $\forall x$ $0 \le \xi(x) \le 1$;
б) $\xi(x) = 1$, если $x \in \Omega$; в) $\operatorname{supp}\xi \subset B_a$.

Введём непрерывную ф-ию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \xi(x)\varphi(x), & x \in B_a \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_a \end{cases}$$

Очевидно, $|u(x) - \Phi(x)| \le$
$\le |u(x) - \varphi(x)|$ и

$$\|u-\Phi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|u-\Phi\|_{L_p(B_{2a})} \leq$$

$$\leq \|u-\varphi\|_{L_p(B_{2a})} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Будучи непрерывной финитной ф-ей, Φ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\exists \delta > 0$ т.ч.

$$|\Phi(x+z)-\Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(B_{2a})^{1/p}}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in B_\delta$.

Следовательно,

$$\|\Phi(\cdot+z)-\Phi(\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \int_{B_{2a}} |\Phi(x+z)-\Phi(x)|^p dx <$$

$$< \frac{\varepsilon^p}{3^p \mu(B_{2a})} \mu(B_{2a}) = \frac{1}{3^p}\varepsilon^p.$$

Следующая оценка завершает док-во:

$$\|u(\cdot+z)-u(\cdot)\|_{L_p(\Omega)} \le \|u(\cdot+z)-u(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|u(\cdot+z)-\Phi(\cdot+z)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|\Phi(\cdot+z)-\Phi(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u-\Phi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$ ∎

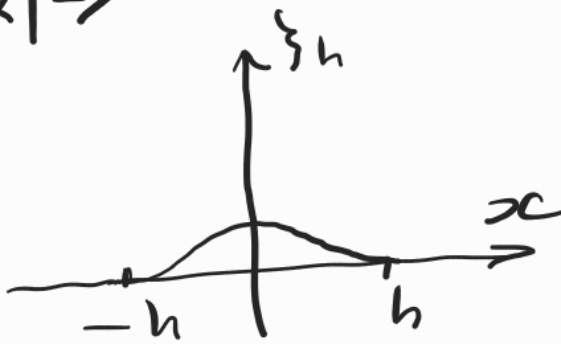
Теорема 1.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$. Тогда пр-во основных в об-ти Ω ф-ий $\mathcal{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L_p(\Omega)$.

Для док-ва вспомним технику усреднения, которую мы уже применяли при док-ве ∞ дифф-ти гармонических ф-ий (см. https://baikov.org/pdebook2).

Определение 1.1. Ядром усреднения радиуса $h>0$ называется ф-я $\xi_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ со св-м: 1) $\xi_h \geq 0$;
2) ξ_h – радиальная – симм. ф-я;
3) $\operatorname{supp}\xi_h = B_h(0)$; 4) $\int_{B_h(0)} \xi_h(x)\,dx = 1$.

Примером ядра усреднения может служить ф-я

$$\xi_h(x) = \begin{cases} \frac{C_n}{h^n} \exp\left(\frac{-h^2}{h^2-|x|^2}\right), & |x|<h \\ 0, & |x|\geq h, \end{cases}$$



где $C_n>0$ подобрана так, чтобы указанная ф-я удовлетворяла п. 4 в опр. 1.1.

$$(J_h u)(x) = \int_\Omega u(y)\,\xi_h(x-y)\,dy =$$

$$= (u * \xi_h)(x)$$ – оператор усред-я, действующий на $u \in L_2(\mathbb{R})$.

↑ свёртка

$\Omega^h = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Omega) < h\}$ –

– h-окрестность Ω.

Легко видеть: $\operatorname{supp} J_h u \subset \overline{\Omega^h}$.

Далее $p = 2$, но можно сформулировать и док-ть аналогичные утверждения для произвольного $p \in [1, \infty)$.

Лемма 1.1 (об уср-ии). $\forall u \in L_2(\Omega)$

$\| J_h u - u \|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

Замечание: ф-ии $u \in L_2(\Omega)$ продолжены нулём вне Ω.

Док-во. Используем: определяющие св-ва ядра усреднения, нер-во К-Б-Ш, замену переменных в инт-ле. Имеем:

$$|u(x)-(J_h u)(x)|^2 = \left| \int_{B_h(x)} (u(x) - u(y)) \xi_h(x-y)\, dy \right|^2 \le \int_{B_h(0)} \xi_h(z)^2 dz$$

$$\int_{B_h(0)} |u(x+z)-u(x)|^2 dz \le$$

$$\le \frac{C_n}{e h^n} \int_{B_h(0)} \xi_h(z)\, dz \int_{B_h(0)} |u(x+z)-u(x)|^2 dz = \frac{C_n}{e h^n} \int_{B_h(0)} |u(x+z)-u(x)|^2 dz.$$

Проинтегрируем, принимая во внимание монотонность интеграла, полученное нер-во по Ω и применим теорему Фубини:

$$\|u - J_h u\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{C_n}{e h^n} \int_{B_h(0)} dz \int_{\Omega}$$

$|u(x+z)-u(x)|^2 dx$.

Из теоремы 1.3 о непрерывности в L_2-среднем следует, что $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ $\forall h \in (0,\delta)$ $\|u(\cdot+z)-u(\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u(x+z)-u(x)|^2 dx < \varepsilon$.

Отсюда $\|u - J_h u\|^2_{L_2(\Omega)} \le$

$\le \frac{\varepsilon c_n}{e h^n} \int\limits_{B_h(0)} dz = \frac{c_n \varkappa_n \varepsilon}{e^n}$ при $h < \delta$ ▨

$\varkappa_n = \mathrm{vol}\,(B_1(0))$

$B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ – стандартный шар.

Док-во теоремы 1.4.

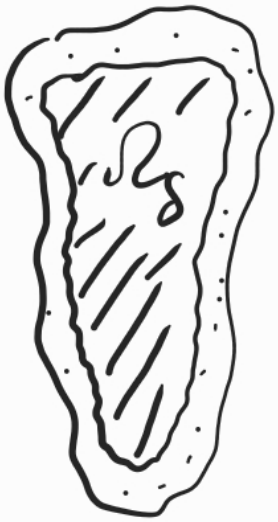
Пусть $u \in L_2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим открытое мн-во

$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \delta\}$

(δ - внутренность об-ти Ω).

В силу абсолютной непр-ти интеграла Лебега $\exists \delta > 0$ т.ч.

$$\|u\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Продолжим ф-ю u нулём вне Ω_δ и обозначим это продолжение через v (оно называется грубой срезкой ф-ии u). По лемме 1.1 об усреднении $\exists h > 0$ т.ч. $J_h v \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $\|J_h v - v\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Имеем: $\|u - J_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq$

$$\leq \|u - v\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)} + \|J_h v - v\|_{L_2(\Omega)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Определение 1.2. Пр-во локально квадратично интегрируемых ф-ий $L_{2,loc}(\Omega)$ состоит из таких (классов) измеримых в об-ти Ω ф-ий

$u: \Omega \to \mathbb{R}$, что $\forall x^0 \in \Omega \ \forall \rho > 0$
$B_\rho(x^0) \Subset \Omega$ $u|_{B_\rho(x^0)} \in L_2(B_\rho(x^0))$.

Замечания 1) $u \in L_{2,loc}(\Omega) \Leftrightarrow$
$\forall K \subset \Omega$, K - компакт, $u|_K \in L_2(K)$.
2) Пр-ва $L_{p,loc}(\Omega)$ определяется аналогично.

Лемма 1.2 (лемма Дюбуа-Реймона). Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$.
Тогда $u = 0$ (как эл-т пр-ва $L_{2,loc}(\Omega)$, т.е. $u(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$)

Замечание. Об-ть Ω м.б. неограниченной (например, $\Omega = \mathbb{R}^n$).

Док-во. Пусть $Q \subset \Omega$ - произвольная строго внутр. огр. подоб-ть
Рассмотрим лин. ф-л
$L_2(Q) \ni v \mapsto \int_Q v\,u|_Q\,dx$, огр.
над $L_2(Q)$. По условию леммы

он равен нулю $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ – всюду плотном подпр-ве в $L_2(\Omega)$ $\Rightarrow$ имеем дело с нулевым ф-м $\Rightarrow u|_\Omega = 0$. Т.к. Ω – произвольная огр. подоб-тв, $u = 0$ в $L_{2,loc}(\Omega)$ ▨

§2. Обобщённые производные

Обобщённая производная ф-ии из $L_{2,loc}(\Omega)$ – это производная соотв. о.ф. из $\mathcal{D}(\Omega)$. Но теорию обобщённых ф-ий мы знаем поверхностно (она будет в теме 3 "Обобщённые ф-ии и фундаментальное решение"), поэтому дадим прямое определение, оставаясь в пр-ве лок. квадр. интегр. ф-ий.

Определение 1.3. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ (мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – порядок α). Ф-ю $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$ будет называть о.п. ф-ии $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, соотв. мультииндексу α, в об-ти Ω, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$(1.7) \quad \int_\Omega (D^\alpha u)\varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u (D^\alpha \varphi) \, dx$$

Простые св-ва о.п.

1. Пусть $u \in C^k(\Omega)$, $k = |\alpha|$, Тогда класс. производная $D^\alpha u \in C(\Omega)$ является о.п. (отсюда слово 'обобщённая', хотя ещё говорят 'слабая', и совпадение обозначений). Действительно,

можно k раз применить ф-лу интегр-ия по частям к инт-лу $\int_\Omega (D^\alpha u)\varphi\,dx$. Учитывая финит-ность φ, получим ин-л в правой части (1.7).

2. О.п. единственна. Это немедленно следует из леммы Дюбуа-Реймона.

3. Линейность о.п.: если $\exists$ о.п. $D^\alpha u$, $D^\alpha v \in L_{2,loc}(\Omega)$ ф-ий $u, v \in L_{2,loc}(\Omega)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ - произвольные числа, то $\exists D^\alpha(\lambda u + \mu v) \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

4. О.п. не зависит от порядка дифференцирования, а именно: пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $u \in L_{2,loc}(\Omega)$,

$\exists D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $\exists D^\beta(D^\alpha u) \in L_{2,loc}(\Omega)$. Тогда $\exists D^{\alpha+\beta} u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u)$ (док-во — упражнение).

повторная производная

5. Правило Лейбница:

пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $\exists$ о.п. $u_{x_j} \in L_{2,loc}(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega)$, Тогда $\exists$ о.п. $(uv)_{x_j} \in L_{2,loc}(\Omega)$ и работает правило Лейбница

$$(uv)_{x_j} = u_{x_j} v + v u_{x_j}$$

Замечание. Ф-ии из пр-ва $L_{2,loc}(\Omega)$ можно умножать на ф-ии из $C(\Omega)$ — произведение

будет принадлежать $L_{2,loc}(\Omega)$ ($L_{2,loc}(\Omega)$ – модуль над кольцом $C(\Omega)$).

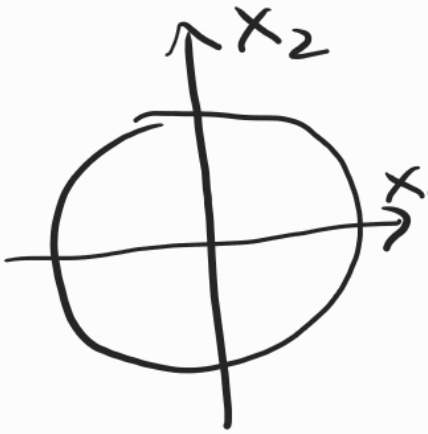
6. Сужение: пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ $\exists$ о.п. $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $\Omega' \subset \Omega$ (подобласть), тогда сужение $u|_{\Omega'} \in L_{2,loc}(\Omega')$ имеет о.п. $D^\alpha(u|_{\Omega'}) \in L_{2,loc}(\Omega')$ и

$$D^\alpha(u|_{\Omega'}) = D^\alpha u|_{\Omega'}$$

Замечание В следующем параграфе "пространства Соболева: определение и простые св-во" немного поговорим о дужках, а в теме 3 поговорим о них более основательно.

Замечание Из $\exists$ о.п. п-ка к НЕ следует $\exists$ о.п. п-ка $(k-1)$ увидим это на примерах.

Примеры 1. $u(x_1, x_2) = |x_1|$



$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ - стандартный диск

Найти: u_{x_1}, u_{x_2}.

$\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_1 > 0\}$, $\Gamma = \{x \in \Omega : x_1 = 0\}$,

$\Omega_- = \{x \in \Omega : x_1 < 0\}$. Пусть

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, тогда $\iint\limits_{\Omega} u \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 =$

$= \iint\limits_{\Omega_+} x_1 \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 - \iint\limits_{\Omega_-} x_1 \varphi_{x_1} dx_1 dx_2$

$= \int\limits_{\Gamma} x_1 \varphi|_{\Gamma}(-1) dx_2 - \int\limits_{\Gamma} x_1 \varphi|_{\Gamma}(1) dx_2 =$

$\uparrow$ инт-е по частям

$\Gamma \to 0$ $\quad$ $\Gamma \to 0$

$$-\iint_{\Omega_+} \varphi \, dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega_-} \varphi \, dx_1 dx_2 =$$

$$= -\iint_{\Omega} \operatorname{sign}(x_1) \, dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$u_{x_1} = \operatorname{sign}(x_1)$ – о.п. в $L_2(\Omega)$.

Аналогично можно пок-ть, что $u_{x_2} = 0$ – о.п. в $L_2(\Omega)$.