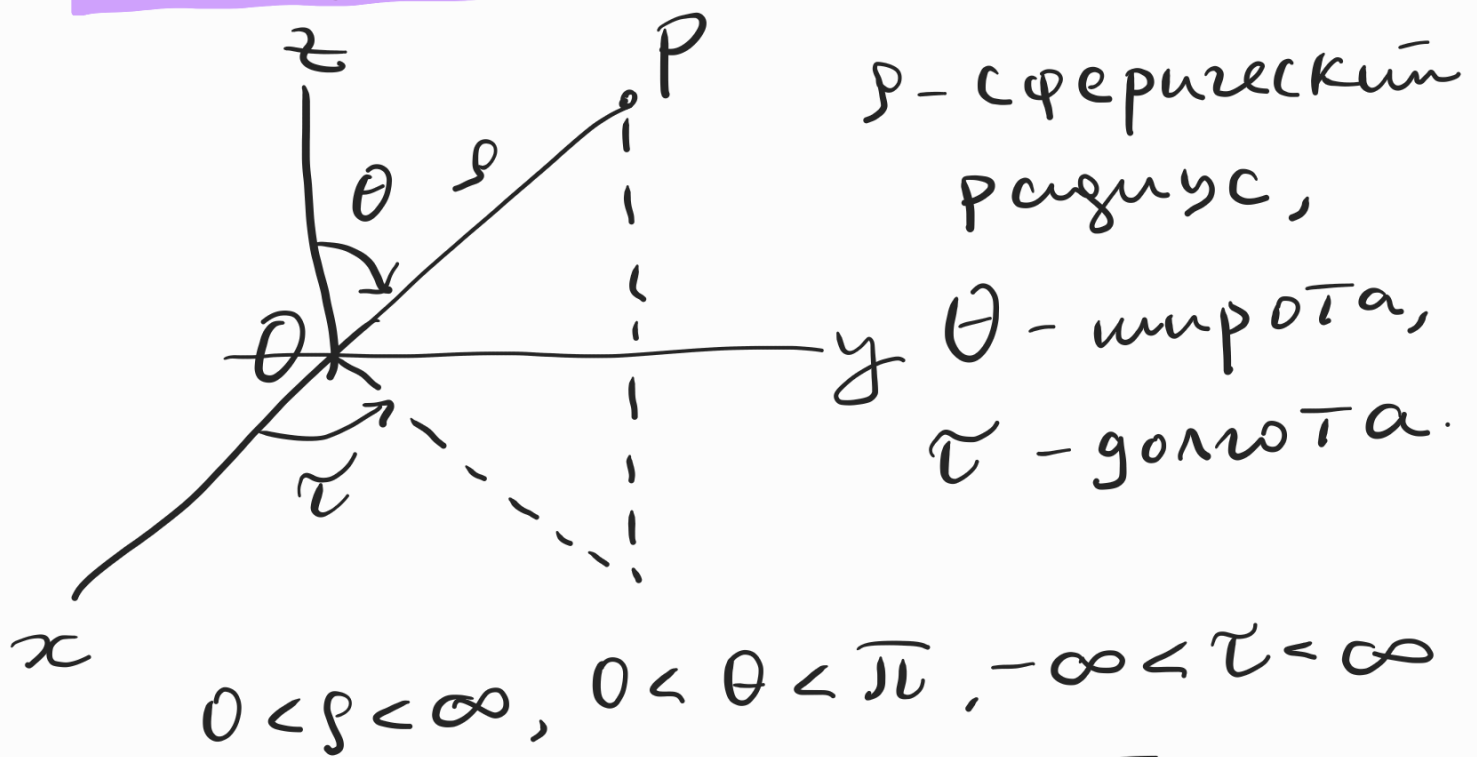


Тема 1 "Красивые задачи: разделение переменных в полярных и сферических координатах": часть 2

§2. Разделение переменных в сферических координатах



(1.18)
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \tau & \text{Якобиан:} \\ y = r \sin \theta \sin \tau & J = r^2 \sin \theta. \\ z = r \cos \theta & \text{Сферическая} \end{cases}$$

система имеет ось на $Oz (J=0)$.

Оп-р Лапласа в сферических координатах:

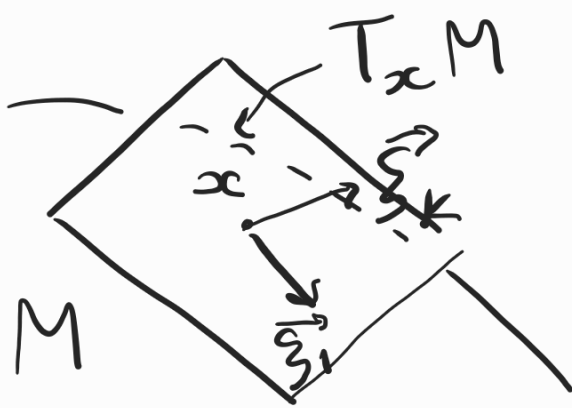
$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (1.19)$$

Формулу (1.19) можно получить из ур-я Лапласа в декартовых координатах $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ и замены (1.18) (как при выводе оп-ра Лапласа в полярн. коорс) **BDSM**

Пусть M - область в $\mathbb{R}^n$ или M - гладкая (класса C^∞) k -мерная ($1 \leq k \leq n-1$) поверхность

в $\mathbb{R}^n$. Введём локальные координаты $q^1, \dots, q^k$ с открытым (в топологии M) районом действия.

Базис в касат. пр-ве $T_x M$ ($x \in M$, $\dim T_x M = k$) пусть $\vec{\xi}_i = \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \vec{e}_j$, $i = 1, \dots, k$, где $x^1, \dots, x^n$ — декарт. координаты, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, но j происходит суммированием от 1 до n . $\vec{\xi}_i$ — скал. пр-ие в $\mathbb{R}^n$.



$g_{ij} = \vec{\xi}_i \cdot \vec{\xi}_j$ — ковариантные компоненты метрического тензора g

(первая квадратичная форма)

$G = (g_{ij})_{i,j=1}^k$ — матрица Грама

g^{ij} — контравариантные компоненты

$(g^{ij})_{i,j=1}^k = G^{-1}$

Оператор Лапласа-Бельтрами действуют на ф-ии $u \in C^\infty(M)$ по формуле

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u), \text{ где}$$

∇u — градиентное векторное поле, $\operatorname{div}(\cdot)$ — оп-р дивергенции векторного поля на M . Мы не будем их определять, но дадим явную ф-лу для оп-ра Лапласа-Бельтрами

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right), \quad (1.20)$$

где $g = \det G$.

Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ (или в об-ти $M \subset \mathbb{R}^n$) — частный случай оператора Лапласа-Бельтрами. Используем ф-лу (1.20) для получения формулы (1.19). В сферических координатах матрица ковариантных компонент метрического тензора имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \Rightarrow (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{\rho^4 \sin^2 \theta} = \rho^2 \sin \theta = J - \text{Якобиан.}$$

$$\text{Отсюда } \Delta u = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) +$$

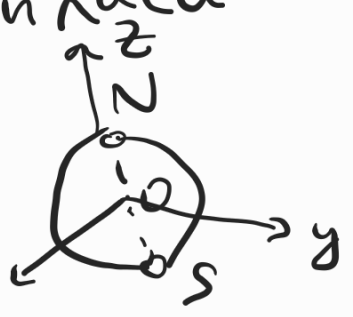
$$+ \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) =$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Задача 1.4. Найти с.з. и с.ф.

противоположных оп-ра Лапласа-Бельтрами на 2D сфере

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$$



Решение. Оп-р Лапласа-Бельтрами

на S^2 в сферических координатах

имеет вид

$$-\Delta Y = -\frac{\partial^2 Y}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta}$$

(решон действия карты суть $S^2 \setminus \{N, S\}$, где $N(0; 0; 1)$, $S(0; 0; -1)$ — полюсы). Спектральная задача в сферических координатах имеет вид

$$(1.21) \quad \begin{cases} -\Delta \psi = \lambda \psi, & 0 < \theta < \pi, -\infty < \tau < +\infty, \\ \psi(\theta, \tau + 2\pi) \equiv \psi(\theta, \tau), & \text{— периодическое условие} \\ \max_{\tau} |\psi(\theta, \tau)| = O(1), & \text{— асимпт.} \\ & \theta \rightarrow +0, \text{ условие на сев. пол.} \\ \max_{\tau} |\psi(\theta, \tau)| = O(1), & \text{— асимпт.} \\ & \theta \rightarrow \pi - 0, \text{ условие на южн. пол.} \end{cases}$$

Замечание. У сферы нет края (границы), поэтому спектр. задача (1.21) не содержит краевое условие. Но из-за особенностей сферических координат необходимо требовать периодическое условие и асимптотические условия на полюсах.

Основное предположение: если ψ —

с.ф. задачи (1.21), то она представляет собой конечную сумму ф-ий вида $V(\theta)W(\tau)$.

Подставим $\Psi(\theta, \tau) = V(\theta)W(\tau)$ в задачу (1.21).

а) Ур-ие Гельмгольца $\Delta \Psi + \lambda \Psi = 0$:

$$-V''(\theta)W(\tau) - \frac{1}{\sin^2 \theta} V(\theta)W''(\tau) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V'(\theta)W(\tau) = \lambda V(\theta)W(\tau).$$

Разделяем переменные:

$$\sin^2 \theta \frac{V''(\theta)}{V(\theta)} + \cos \theta \sin \theta \frac{V'(\theta)}{V(\theta)} + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{W''(\tau)}{W(\tau)} = \mu = \text{const}$$

б) Периодическое условие

$$V(\theta)W(\tau + 2\pi) \equiv V(\theta)W(\tau)$$

$$\text{даёт } W(\tau + 2\pi) \equiv W(\tau).$$

имеем 1D спектральную задачу

$$\begin{cases} -W'' = \mu W, -\infty < \tau < +\infty, \\ W(\tau + 2\pi) \equiv W(\tau) \end{cases}$$

с решением: $\mu_0 = 0, W_0(\tau) = 1$;

$\mu_k = k^2, W_k^{(1)}(\tau) = \cos(k\tau), W_k^{(2)}(\tau) = \sin(k\tau)$,

где $k = 1, 2, \dots$

б) Асимптотические условия на полторах:

$\leftarrow \cos(k\tau)$ или $\sin(k\tau)$

$$\max |V(\theta)W(\tau)| = |V(\theta)| = \underline{O}(1),$$

$$\theta \xrightarrow{\tau} +0 \text{ или } \theta \rightarrow \pi - 0 \Rightarrow V(\theta) = \underline{O}(1),$$

$$\theta \rightarrow +0; V(\theta) = \underline{O}(1), \theta \rightarrow \pi - 0.$$

Относительно функции $V = V(\theta)$

имеем 1D спектр. задачу

$$\begin{cases} -V'' - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V' + \frac{k^2}{\sin^2 \theta} V = \lambda V, 0 < \theta < \pi \\ V(\theta) = \underline{O}(1), \theta \rightarrow +0, \\ V(\theta) = \underline{O}(1), \theta \rightarrow \pi - 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Уравнение

$$(1.23) \quad V'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V' + \left(\lambda - \frac{k^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0$$

пугает, но мы не робкого гусьтка.

Преобразуем уравнение (1.23):

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \left(\lambda - \frac{k^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0$$

Сделаем замену $\xi = \cos \theta$;

$$0 < \theta < \pi \Leftrightarrow -1 < \xi < 1; \quad \theta = \arccos \xi.$$

$$\text{Имеем } \frac{dV}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dV}{d\xi}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\xi} \left(-(1-\xi^2) \frac{dV}{d\xi} \right) =$$

$$= \frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{dV}{d\xi} \right). \quad \text{Преобразованное}$$

уравнение имеет вид  лежандра

$$(1.24) \quad \frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{dV}{d\xi} \right) + \left(\lambda - \frac{k^2}{1-\xi^2} \right) V = 0.$$

Факт из аналитической теории
дифференциальных уравнений:

Ур-ие (1.24) имеет нетривиаль-
ные решения без особенностей
в точках $\xi = -1, \xi = 1$ тогда и только
тогда, когда

$$\lambda_m = m(m+1), m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

Ф-ла (1.25) даёт с.з. задачи (1.22)
и задачи (1.21)

а) $\kappa = 0$: $P_m(\xi) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{d\xi^m} [(\xi^2 - 1)^m]$

полином Лежандра степени m .
Он является единственным нез.
решением ур-ия (1.24) при
 $\lambda_m = m(m+1), \kappa = 0$, не имеющим
особенностей в точках $\xi = -1, \xi = 1$.

Некоторые св-ва полиномов Лежандра

1) Производящая функция
(была придумана в небесной

механике):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\xi+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) t^n$$

2) Полиномы Лежандра получают-
ся в процессе ортогонализации
мономмиальной системы $\{1, \xi, \xi^2, \xi^3, \dots\}$

в пространстве $L_2(-1, 1)$. Но

$$\|P_m\|_{L_2(-1,1)}^2 = \frac{2}{2m+1} \quad 3) \text{ Рекуррентная } \varphi\text{-ла}$$

$$P_{m+1}(\xi) = \frac{2m+1}{m+1} \xi P_m(\xi) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(\xi)$$

Первые полиномы Лежандра:

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1),$$

$$P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi) \dots$$

б) $k \in \mathbb{N}$: единственным нез. реш-м
ур-ня Лежандра (1.24), не имею-
щим особенностей в точках $\xi = -1$,
 $\xi = 1$, является присоединённая
функция Лежандра:

$$V_{mk}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{k}{2}} P_m^{(k)}(\xi).$$

Присоединённые ф-ии также образуют ортогональный базис в $L_2(-1, 1)$ (при фикс. k), причём

$$(V_{mk}, V_{mk})_{L_2(-1, 1)} = \frac{2}{2m+1} \frac{(m+k)!}{(m-k)!}$$

Итак, с.з. и с.ф. 1D спектральной задачи (1.22) суть:

$$\lambda_m = m(m+1), m \in \mathbb{N}_0,$$

$$V_{mk}(\theta) = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta),$$

$$(k = 0, 1, \dots, m)!$$

Теперь выпишем решение спектр. задачи (1.21), т.е. с.з. и с.ф. оператора Лапласа-Бельтрами с минусом на S^2 .

- $\lambda_m = m(m+1), m = 0, 1, 2, \dots$ — с.з.;
- $Y_{mk}^{(1)}(\theta, \tau) = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \cos(k\tau),$

$k=0, \dots, m$, $Y_{mk}^{(2)}(\theta, \tau) = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \sin(k\tau)$, $k=1, \dots, m$ — с.ф., отвечающие с.з. λ_m

• кратность m -го с.з. равна $2m+1$.

Определение. С.ф. оп-ра $-\Delta$ на S^2 называется сферической ф-ей.