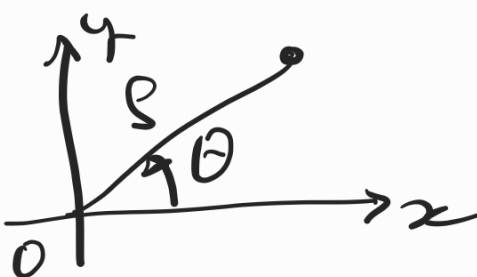


Тема 1 "Красивые задачи: разделение переменных в полярных и сферических координатах": часть 1

§1. Разделение переменных в полярных координатах

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$


ρ — полярный радиус,

θ — полярный угол

$\gamma = \rho$ — якобиан полярных координат

$$u_\rho = u_x x_\rho + u_y y_\rho = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta;$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x \rho \sin \theta + u_y \rho \cos \theta;$$

$$u_{\rho\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) =$$

$$= \cos \theta \frac{\partial u_x}{\partial \rho} + \sin \theta \frac{\partial u_y}{\partial \rho} =$$

$$= \cos \theta (u_{xx} \cos \theta + u_{xy} \sin \theta) +$$

$$+ \sin \theta (u_{xy} \cos \theta + u_{yy} \sin \theta) =$$

$$= u_{xx} \cos^2 \theta + \underline{2 u_{xy} \cos \theta \sin \theta} + u_{yy} \sin^2 \theta;$$

$$u_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (-u_x \rho \sin \theta + u_y \rho \cos \theta) =$$

$$= \underline{-u_x \rho \cos \theta - u_y \rho \sin \theta} - \rho \sin \theta \frac{\partial u_x}{\partial \theta} +$$

$$+ \rho \cos \theta \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \stackrel{-\rho u_\rho}{=} -\rho \sin \theta (-u_{xx} \rho \sin \theta +$$

$$+ u_{xy} \rho \cos \theta) + \rho \cos \theta (-u_{xy} \rho \sin \theta +$$

$$+ u_{yy} \rho \cos \theta) - \rho u_\rho = u_{xx} \rho^2 \sin^2 \theta -$$

$$- \underline{2 u_{xy} \rho^2 \cos \theta \sin \theta} + u_{yy} \rho^2 \cos^2 \theta -$$

$$- \rho u_\rho. \text{ Рассмотрим: } \rho^2 u_{\rho\rho} + u_{\theta\theta} =$$

$$= \rho^2 u_{xx} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) +$$

$$+ \rho^2 u_{yy} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \rho u_\rho.$$

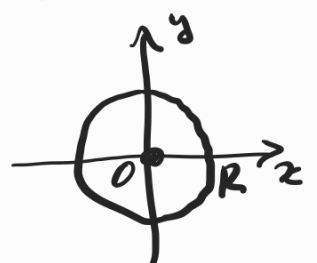
$$\text{Отсюда } \rho^2 \Delta u = \rho^2 (u_{xx} + u_{yy}) -$$

$$-\delta u_\delta = \delta^2 u_{\delta\delta} + u_{\theta\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta u = u_{\delta\delta} + \frac{1}{\delta} u_\delta + \frac{1}{\delta^2} u_{\theta\theta}} \quad (1.1)$$

— оператор Лапласа в полярных координатах.

Задача 1.1. Получить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге



$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < R^2, \\ u = \varphi, & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

методом разделения переменных в декартовых координатах.

Решение. Если $\varphi \in C$, то класс. решение задачи (1.2) даёт ф-ла Пуассона

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\omega_{n-1} R} \int_{S_R} \frac{\varphi(x) dS}{|x - x^0|^n},$$

где ω_{n-1} — поверхность (1-й)-мерной сферы

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

В 2D случае будет

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta) R d\theta}{R^2 + |x_0|^2 - 2R|x_0|\cos\gamma},$$

где γ — угол между Ox и Ox^0 , или, если представить решение в полярных координатах

$$(1.3) \quad u(\varrho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \varrho_0^2) \varphi(\theta) d\theta}{R^2 + \varrho_0^2 - 2R\varrho_0 \cos(\theta_0 - \theta)}.$$

Цель: ещё раз получить ф-лу (1.3), выполнив разделение полярных координат.

Вспомним, что метод Фурье всегда состоит из двух этапов:

I. Получение и решение спектральной задачи.

II. Разложение решения в ряд по с.ф. спектр. задачи, отыскание коэфф-ов разложения.

Исследование сходимости ряда Фурье, вывод ф-лы интегр. представления не относятся к методу разделения переменных, но также будет сделан.

Перенесем задачу (1.2) в полярных координатах:

$$(1.4) \begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0, & 0 < \rho < R, \\ & -\infty < \theta < \infty! \\ u(R, \theta) = \varphi(\theta), & \text{— ука-е Дирихле} \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), & \text{— периодическое} \\ & \text{условие} \\ \max_{\theta} |u(\rho, \theta)| = \tilde{o}(\ln \rho), \rho \rightarrow +0 & \text{— асимптотическое} \\ & \text{условие} \end{cases}$$

Теорема об устранении особенностей.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — об-ть, $x^0 \in \Omega$, $\Delta u = 0$ в $\Omega \setminus \{x^0\}$, $\max_{S_{\rho}(x^0)} |u| = \tilde{o}(\rho), \rho \rightarrow 0$,

где $E(x) = E(|x|)$ — функ. решения лангасана. Тогда ос-ть в точке x^0

устранима: $\exists \lim_{x \rightarrow x^0} u(x) = u(x^0)$,
и — гармоническая ф-я в Ω .

I. Рассмотрим специальную задачу

$$(1.5) \begin{cases} \Delta U = 0, & 0 < \rho < R, -\infty < \theta < \infty, \\ U(\rho, \theta + 2\pi) \equiv U(\rho, \theta). \end{cases}$$

Будем искать метрив. решение задачи (1.5) в виде $V(r, \theta) = Z(s)Y(\theta)$.

Периодическое условие:

$$Z(s)Y(\theta + 2\pi) = Z(s)Y(\theta) \Rightarrow$$

$$Y(\theta + 2\pi) = Y(\theta).$$

Уравнение:

$$Z''(s)Y(\theta) + \frac{1}{s} Z'(s)Y(\theta) + \frac{1}{s^2} Z(s)Y''(\theta) = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{s^2 Z''(s) + s Z'(s)}{Z(s)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda = \text{const.}$$

Спектральная задача:

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y, & -\infty < \theta < \infty, \\ Y(\theta + 2\pi) = Y(\theta). \end{cases} \quad (1.6)$$

Постановка задачи (1.6): найти все такие значения λ , что $\exists$ метр. 2π -периодические решения ур-я $-Y'' = \lambda Y$.

Собственные значения (с.з.): $\lambda_k = k^2$,

Собственные функции (с.ф.): $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\bullet k \in \mathbb{N} \Rightarrow Y_k^{(1)}(\theta) = \cos(k\theta), Y_k^{(2)}(\theta) = \sin(k\theta)$$

$$\bullet k = 0 \Rightarrow Y_0(\theta) = 1.$$

(т.е. положит. с.з. кр-ти 2, $\lambda = 0$ -с.з. кратности 1)

$\{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos(2\theta), \sin(2\theta), \dots\}$ - ортон. базис пр-ва $L_2(0, 2\pi)$ (станд. тригонометрический базис)

$\varphi \in L_2(0, 2\pi) \rightarrow$

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$$

тогда $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos(k\theta) d\theta,$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin(k\theta) d\theta \quad (\text{рег Фурье})$$

сх-ца по L_2 -норме, т.е. в среднем квадратах).

решим ур-е где z :

$$s^2 z'' + s z' - k^2 z = 0.$$

подстановка $z(s) = s^s$ даёт

$$s^2 s(s-1) s^{s-2} + s s s^{s-1} - k^2 s^s = 0;$$

$$s(s-1) + s - k^2 = 0;$$

$$s^2 - k^2 = 0; \quad s = s_1 = -k \text{ или } s = s_2 = k.$$

При $k \in \mathbb{N}$, $z_k(s) = C_k s^{-k} + D_k s^k.$

Если $\kappa = 0$, $z_0(s) = C_0 \ln s + D_0$.

II. Представим решение задачи (1.4) в виде (формального) ряда Фурье

$$u(s, \theta) = \frac{1}{2} A_0(s) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(s) \cos(k\theta) + B_k(s) \sin(k\theta) \quad (1.7)$$

Подставим ряд (1.7) в ур-е Лапласа, получив поэлементные дифф-ие, получим ур-я для A_k, B_k :

$$s^2 A_k'' + s A_k' - k^2 A_k = 0,$$

$$s^2 B_k'' + s B_k' - k^2 B_k = 0.$$

Условие Дирихле задачи (1.4) даёт:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(R) \cos(k\theta) + B_k(R) \sin(k\theta) = \\ = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta). \end{aligned}$$

Отсюда $A_k(R) = a_k, k \in \mathbb{N}_0$,

$B_k(R) = b_k, k \in \mathbb{N}$.

Подставлять ряд (1.7) в асимптотическое условие возможным не представляется (как вычислить $\max$?), поэтому потребуем асимпт. ур-я от каждого члена:

$$\max_{\theta} |A_k(s) \cos(k\theta) + B_k(s) \sin(k\theta)| =$$

$$= \sqrt{A_k(s)^2 + B_k(s)^2} = \tilde{O}(\ln s) \Leftrightarrow$$

$$A_k(s) = \tilde{O}(\ln s), B_k(s) = \tilde{O}(\ln s).$$

Имеем краевые задачи для A_k, B_k :

$$\begin{cases} s^2 A_k'' + s A_k' - k^2 A_k = 0, 0 < s < R, \\ A_k(s) = \tilde{O}(\ln s), s \rightarrow 0, A_k(R) = a_k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 B_k'' + s B_k' - k^2 B_k = 0, 0 < s < R, \\ B_k(s) = \tilde{O}(\ln s), s \rightarrow 0, B_k(R) = b_k. \end{cases}$$

их решения: $A_k(s) = a_k \left(\frac{s}{R}\right)^k, k \in \mathbb{N}_0,$

$$B_k(s) = b_k \left(\frac{s}{R}\right)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, ряд Фурье, представляющий решение задачи (1.4), есть

$$u(s_0, \theta_0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s_0}{R}\right)^k \left(a_k \cos(k\theta_0) + b_k \sin(k\theta_0)\right). \quad (1.8)$$

где a_k, b_k — коэф-ты Фурье граничной ф-ии ψ . Подставим ф-лы для последних в ряд (1.8) и сделаем рокировку $\int_0^{2\pi}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}$:

$$u(s_0, \theta_0) = \int_0^{2\pi} K(\theta, s_0, \theta_0) \psi(\theta) d\theta,$$

$$\text{vgl } K(\theta, \vartheta_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta_0}{R}\right)^k \left(\cos(k\theta_0) \cdot \cos(k\theta) + \sin(k\theta_0) \sin(k\theta)\right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta_0}{R}\right)^k \cos(k(\theta_0 - \theta)).$$

$$\text{Обозначим } z = \frac{\vartheta_0}{R} e^{i(\theta_0 - \theta)},$$

$$|z| < 1; \text{ из ф-лы } \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \text{ получим:}$$

$$K(\theta, \vartheta_0, \theta_0) = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}[z^k] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{R}{R - \vartheta_0 e^{i(\theta_0 - \theta)}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} + \frac{R}{\pi} \frac{R - \vartheta_0 \cos(\theta_0 - \theta)}{(R - \vartheta_0 \cos(\theta_0 - \theta))^2 + \vartheta_0^2 \sin^2(\theta_0 - \theta)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \vartheta_0^2 + 2R\vartheta_0 \cos(\theta_0 - \theta)}{R^2 + \vartheta_0^2 - 2R\vartheta_0 \cos(\theta_0 - \theta)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \vartheta_0^2}{R^2 + \vartheta_0^2 - 2R\vartheta_0 \cos(\theta_0 - \theta)}$$

(совпадение с интегральной ядром формулы (1.3)!

Если $\varphi \in C(S_R)$, то $\exists!$ класс. решение $u \in C^\infty(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$ задачи (1.2), представляемой φ -ой Пуассона (1.3).
 Для $0 \leq \varrho < R$ ряд Фурье (1.8) сходится к решению равномерно, т.к. гармоническая φ -я $\in$ дифф. в B_R . При $\varrho = R$ ряд Фурье (1.8) совпадает с рядом Фурье гранич. ф-ии φ ; он сходится только в среднем квадратичном

Вопрос: какому функц. пр-ву должна принадлежать φ , чтобы ряд Фурье (1.8) сходился в пр-ве $H^1(B_R)$?

Определение φ -я $u \in H^1(B_R)$ назыв. обобщённым решением задачи (1.2), если: 1) $u|_{S_R} = \varphi$ (в смысле оператора следа); 2) для любой пробной ф-ии $v \in H_0^1(B_R)$ (или даже $v \in C_0^\infty(B_R)$) выполнено интегральное равенство

$$\iint_{B_R} \nabla u \cdot \nabla v \, dx_1 dx_2 = 0.$$

Ответ: $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(S_R)$ - пр-во следов,

т.е. образ оператора следа
 $T: H^1(B_R) \rightarrow L_2(S_R).$

В каких ограниченных 2D областях эффективно разделение переменных в полярных координатах?

- круг 
- сектор круга 
- кольцо 
- сектор кольца



Задача 1.2. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в секторе 30° :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \\ u|_{r=1} = \varphi(\theta), \\ u|_{\theta=0} = 0, u|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0, \\ \sup_{\theta} |u(r, \theta)| = O(1), r \rightarrow +0 \end{cases}$$

Рассмотреть зрачковую ф-ю

$\varphi(\theta) \equiv 1$. Обозначение:

$$\Omega = \{x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\}$$

I. Найдем метр. гармонические ф-ии в секторе Ω , удовл. одн. условиям Дирихле на радиусах, и метр. ме вид $V(s, \theta) = Z(s)Y(\theta)$.

$$\bullet Z(s)Y(0) = 0, Z(s)Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0, Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

$$\bullet \frac{s^2 Z''(s) + s Z'(s)}{Z(s)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda = \text{const.}$$

Имеем задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \\ Y(0) = 0, Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Её решение: $\lambda_k = 36k^2$,

$$Y_k(\theta) = \sin(6k\theta), k \in \mathbb{N}.$$

II. Ф-я $\psi \in L_2\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, она допускает разложение в ряд по с.ф. задачи

$$(1.10): \psi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(6k\theta),$$

$$\text{где } \varphi_k = \frac{(\varphi, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{12}{\pi} \int_0^{\pi/6} \varphi(\theta) \sin(6k\theta) d\theta.$$

$$e_k(\theta) = \sin(6k\theta)$$

Решение краевой задачи (1.9) будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(s) \sin(6k\theta). \quad (1.11)$$

Подставим ряд (1.11) в ур-ие Лапласа и условие Неймана задачи (1.9):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s^2 Z_k'' + s Z_k' - 36k^2 Z_k) \varphi_k(\theta) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k'(1) \sin(6k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(6k\theta).$$

Приравнивая коэфф-ты Фурье из левых частей равенств к соответствующим коэфф-м Фурье из правых частей, получим ур-я

и краевые условия задачи для Z_k . Асимптотическое условие задачи (1.9) требует от каждого коэфф-та ряда (1.11). Отсюда краевые задачи для коэфф-ов Z_k имеют вид

$$(1.12) \begin{cases} s^2 Z_k'' + s Z_k' - 6k^2 Z_k = 0, 0 < s < 1, \\ Z_k(s) = O(1), s \rightarrow 0, Z_k'(1) = \varphi_k. \end{cases}$$

Общее решение ур-я с учётом $Z_k(s) = C_k s^{-6k} + D_k s^{6k}$. Из асимпт. усл-я задачи (1.12) $\Rightarrow C_k = 0$. Краевое условие задачи (1.12) даёт $6k D_k = \varphi_k \Rightarrow D_k = \frac{\varphi_k}{6k}$.

Итак, $Z_k(s) = \frac{\varphi_k}{6k} s^{6k}$, а ряд Фурье, представляющий решение задачи (1.9) имеет вид

$$(1.13) u(r_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{6k} r_0^{6k} \sin(6k\theta_0).$$

Подставим в (1.13) выражение
 где коэфф-ты Фурье гравитационной ф-ии:

$$u(\rho_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{6\pi k} \rho_0^{6k} \sin(6k\theta_0) \int_0^{\pi/6} \varphi(\theta) \sin(6k\theta) d\theta.$$

$$\sin(6k\theta) d\theta = \int_0^{\pi/6} K(\theta, \rho_0, \theta_0) \varphi(\theta) d\theta,$$

где ядро интегр. формулы:

$$K(\theta, \rho_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \rho_0^{6k} \sin(6k\theta_0) \sin(6k\theta)$$

просуммируем ядро K .

$$\sin(6k\theta_0) \sin(6k\theta) = \frac{1}{2} (\cos 6k(\theta_0 - \theta) - \cos 6k(\theta_0 + \theta)),$$

$$K_1(\theta, \rho_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho_0^{6k} \cos 6k(\theta_0 - \theta)$$

$$K_2(\theta, \rho_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho_0^{6k} \cos 6k(\theta_0 + \theta)$$

$$K = K_1 - K_2$$

$$K_0(\theta, \vartheta_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \vartheta_0^{6k} \cos(6k\alpha) =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \varrho^k, \text{ где } \varrho = \vartheta^6 e^{6i\alpha}.$$

Продифференцируем по ϑ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \varrho^k \text{ по } \varrho: \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \varrho^k \right)' =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \varrho^{k-1} = \frac{1}{\pi(1-\varrho)}. \text{ Но тогда}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \varrho^k = \int_0^{\varrho} \frac{d\tilde{\varrho}}{\pi(1-\tilde{\varrho})} = -\frac{1}{\pi} \ln(1-\tilde{\varrho}) \Big|_0^{\varrho}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \ln(1-\varrho).$$

$$\text{Итак, } K_0(\theta, \vartheta_0, \theta_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \ln(1-\varrho) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \ln|1-\varrho| = -\frac{1}{2\pi} \ln(1-2\vartheta^6 \cos 6\alpha + \vartheta^{12});$$

$$K(\theta, \vartheta_0, \theta_0) = K_1(\theta, \vartheta_0, \theta_0) - K_2(\theta, \vartheta_0, \theta_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - 2\vartheta^6 \cos 6(\theta_0 + \theta) + \vartheta^{12}}{1 - 2\vartheta^6 \cos 6(\theta_0 - \theta) + \vartheta^{12}}.$$

интегральная ф-ла:

$$u(\vartheta_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/6} \varphi(\theta) \ln \frac{1 - 2\vartheta^6 \cos 6(\theta_0 + \theta) + \vartheta^{12}}{1 - 2\vartheta^6 \cos 6(\theta_0 - \theta) + \vartheta^{12}} d\theta.$$

Найдём коэфф-ты Фурье функции

$$\varphi(\theta) \equiv 1: \quad \varphi_k = \frac{12}{\pi} \int_0^{\pi/6} \sin(6k\theta) d\theta =$$

$$= -\frac{12}{6\pi k} \cos(6k\theta) \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{2}{\pi k} ((-1)^k - 1).$$

При чётных k имеем $\varphi_k = 0$, а
при нечётных k $\varphi_k = \frac{4}{\pi k}$. Т.о.,

ряд Фурье, представляющий решение краевой задачи, имеет вид

$$u(\varrho_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k} \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) \varrho_0^{6k}$$

$$\sin(6k\theta_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{3\pi(2j+1)} \varrho_0^{12j+6} \sin((12j+6)\theta_0)$$

Задача 1.3. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ — полукруг. Найдём собственные значения и собственные функции спектральной задачи для оператора $-\Delta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u, 0 < \varrho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u|_{\varrho=1} = 0, \\ -u_{\theta}|_{\theta=0} = 0, u_{\theta}|_{\theta=\pi} = 0, \\ \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |u(\varrho, \theta)| = O(1), \varrho \rightarrow +0. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Основное предположение: если u — с.ф. задачи (1.14), то она представляет

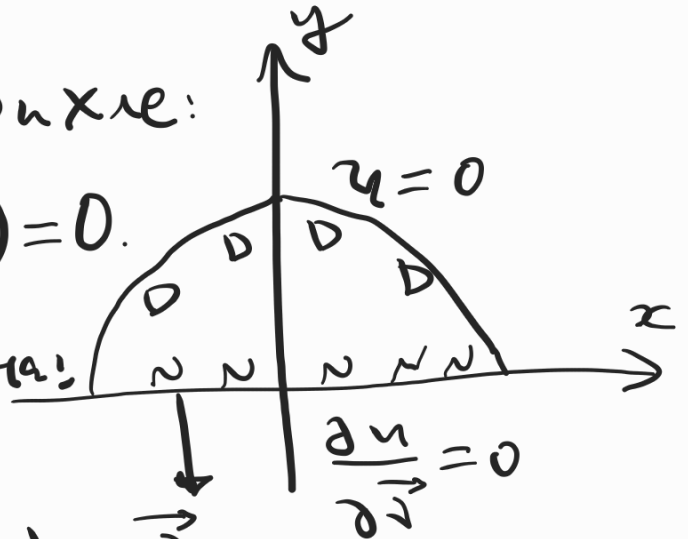
свободой конечную лн. комбинацию
 ф-ий вида $Z(s)Y(\theta)$.

Поэтому сделаем подстановку
 $u(s, \theta) = Z(s)Y(\theta)$ в спектр. задачу (1.14).

• краевое уи-е Дирихле:

$$Z(1)Y(\theta) = 0 \Rightarrow Z(1) = 0.$$

• краевое уи-е Неймана:



$$Z(s)Y'(0) = 0, Z(s)Y'(\pi) = 0 \vec{v}$$

$$\Rightarrow Y'(0) = 0, Y'(\pi) = 0.$$

• ур-ие Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$:

$$s^2 Z''(s)Y(\theta) + s Z'(s)Y(\theta) + Z(s)Y''(\theta) + \lambda s^2 Z(s)Y(\theta) = 0. \text{ Разделяем ур-е:}$$

$$\frac{s^2 Z''(s) + s Z'(s) + \lambda s^2 Z(s)}{Z(s)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \mu = \text{const}$$

Замечание: μ не зависит от λ , потому
 что последний есть только в правой части
 равенства.

имеем 1D спектр. задачу

$$\begin{cases} -Y'' = \mu Y, & 0 < \theta < \pi, \\ Y'(0) = 0, Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

(задача Штурма-Лиувилля).

Её решение: $\mu_k = k^2, Y_k(\theta) = \cos(k\theta),$
 $k = 0, 1, 2, \dots$

• асимптотическое условие

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |u(s, \theta)| = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |z(s) \cos(k\theta)| =$$

$$= |z(s)| = O(1), s \rightarrow +0 \Leftrightarrow z(s) = O(1), s \rightarrow +0.$$

имеем ещё одну 1D спектр. задачу:

$$(1.15) \begin{cases} s^2 z'' + s z' + (\lambda s^2 - k^2) z = 0, & 0 < s < 1, \\ z(s) = O(1), & s \rightarrow +0 \text{ — асимпт. укл-е} \\ z(1) = 0. & \text{— укл-е Дирихле} \end{cases}$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда ур-ие

$$s^2 z'' + s z' - k^2 z = 0$$

и имеет общее решение

$$z_k(s) = C_k s^{-k} + D_k s^k \text{ при } k \in \mathbb{N} \text{ и}$$

$$z_0(s) = C_0 \ln s + D_0 \text{ при } k=0.$$

Из асимпт. уа-я $\Rightarrow C_k = 0$ ($C_0 = 0$)

Тогда из краевого уа-я $\Rightarrow D_k = 0$ ($D_0 = 0$)

Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не с.з.

Можно показать, что задача (1.14) (следовательно, и задача (1.15)) не имеет отрицательных с.з. (без использования предположения о структуре с.ф.).

Пусть $\lambda > 0$; сделаем замену независимой переменной $r = s\sqrt{\lambda}$ в ур-ии

$$s^2 z'' + s z' + (\lambda s^2 - k^2) z = 0.$$

$$\text{Т.к. } \frac{dz}{ds} = \sqrt{\lambda} \frac{dz}{dr}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = \lambda \frac{d^2 z}{dr^2},$$

получим

$$r^2 z_{rr} + r z_r + (r^2 - k^2) z = 0. \quad (1.16)$$

Напомним, что $k \in \mathbb{N}_0$. (1.16) — уравнение Бесселя. Решить его в классе лихвиловых ф-ий нельзя.

Попробуем найти все аналитические

в точке $r=0$ решения (1.16):

$$z(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j.$$

(не факт, что они существуют, т.к.

$r=0$ — сингулярная точка ур-я (1.16))

$$r z_r = \sum_{j=1}^{\infty} c_j j r^j, \quad r^2 z_{rr} = r^2 \sum_{j=2}^{\infty} c_j j(j-1) r^{j-2}.$$

$$(j-1) r^{j-2} = \sum_{j=2}^{\infty} c_j j(j-1) r^{j-2}$$

$$r^2 z = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^{j+2} = \sum_{j=2}^{\infty} c_{j-2} r^j$$

Подстановка ряда в ур-е (1.16)

$$\text{даёт: } \sum_{j=2}^{\infty} [c_j j(j-1) + c_j j + c_{j-2}] r^j = 0$$

$$-k^2 C_j \} r^j + C_1 r - k^2 C_1 r - k^2 C_0 = 0.$$

$$\text{Отсюда } k^2 C_0 = 0; (1-k^2)C_1 = 0;$$

$$(j^2 - k^2)C_j = -C_{j-2}, j \geq 2.$$

$$\bullet k=0 \Rightarrow C_0 \neq 0, \text{ иначе трив.}$$

$$\text{Решение, } C_1 = 0, C_2 = -\frac{C_0}{2^2},$$

$$C_3 = 0, C_4 = \frac{-C_2}{4^2} = \frac{C_0}{(2 \cdot 4)^2} = \frac{C_0}{2^4 (1 \cdot 2)^2},$$

$$C_5 = 0, C_6 = \frac{-C_4}{6^2} = \frac{-C_0}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} = \frac{-C_0}{2^6 (1 \cdot 2 \cdot 3)^2}$$

$$C_{2s+1} = 0, s = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_{2s} = \frac{(-1)^s C_0}{2^{2s} (s!)^2}, s = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Т.о. } z(r) = C_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2s}.$$

$$\text{Если } C_0 = 1, \text{ то имеем } \underline{\phi\text{-ю}}$$

Бесселя первого рода порядка 0:

$$J_0(r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2s}$$

Легко видеть, что при чётных k получается чётная ф-я ($c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$), а при нечётных k — нечётная ф-я ($c_0 = c_2 = c_4 = \dots = 0$).

Если первый $\neq 0$ коэфф-т положить равным 1, то получим

$$J_k(r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2s+k}$$

ф-я Бесселя первого рода порядка k .

Вывод: все аналитические в точке $r=0$ решения ур-я Бесселя (1.16) имеют вид $z(r) = C J_k(r)$, где $C = \text{const}$. Они оказываются

целыми аналит. ф-ми.

Можно пок-ть, что ур-е (1.16)

также имеет мероморфные

решения с единственным
полюсом в точке $r=0$, имеющие
вид $z(r) = D Y_k(r)$, $D = \text{const}$,

Y_k - ф-я Бесселя второго рода
порядка k . Они нам не подходят
из-за асимпт. ука-я $z(s) = \underline{O}(1)$,

$s \rightarrow +0 \Leftrightarrow z(r) = \underline{O}(1)$, $r \rightarrow +0$.

Итак, общее решение ур-я (1.16)

суть $z(r) = C J_k(r) + D Y_k(r)$, в
старой переменной

$$z(s) = C Y_k(s\sqrt{\lambda}) + D Y_k(s\sqrt{\lambda}).$$

Из асимпт. ука-я задачи (1.15)

$\Rightarrow D = 0$ у любой с.ф. Тогда

для краевого условия необходимо

$$Y_k(\Gamma) = 0. \quad (1.17) -$$

характеристическое ур-ие.
Надо изучить нули ф-ий Бесселя.

Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие
Трансцендентные функции. Т. 2.
М.: Наука, 1974.

Результаты о нулях ф-ий Бесселя
первого рода: действительные
нули ф-ии Y_k образуют счётное
мн-во, симметричное относительно
нуля, не имеющее конечных пре-
дельных точек (почему?); все эти
корни простые (кратности 1), кроме
м.б. нуля (упражнение: найти
кратность нуля ф-ии $Y_k, k \geq 1$).

Более того, φ -и Бесселя первого рода разных порядков НЕ имеют общих нулей.

Обозначим $r_j^{(k)}$ - j -ый положительный нуль φ -и J_k , $j=1,2,\dots$

Тогда положительные корни ур-я (1.17) $\Leftrightarrow$ с.з. спектральных задач (1.14) и (1.15) суть

$$\lambda_{kj} = (r_j^{(k)})^2, k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}.$$

с.ф. спектр. задачи (1.15):

$$z_j(s) = J_k(r_j^{(k)} s);$$

с.ф. спектр. задачи (1.14):

$$u_{kj}(s, \theta) = J_k(r_j^{(k)} s) \cos(k\theta),$$

отвечает с.з. $\lambda_{kj} = (r_j^{(k)})^2$, $k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$. Все с.з. простые.