

ОСОБЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \\ (x, y, u) \in \Gamma, \end{cases}$$

где a , b и f — известные гладкие функции в области $D \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma \subset D$ — гладкая кривая. Требуется:

- 1) записать систему характеристик;
- 2) получить два независимых интеграла системы характеристик в окрестности Γ ;
- 3) найти общее решение системы характеристик;
- 4) разбить кривую Γ на участки, где выполнено условие трансверсальности;
- 5) для одного (на выбор) участка трансверсальности получить характеристическую поверхность задачи Коши в неявном и в параметрическом виде, визуализировать её на компьютере;
- 6) исследовать и визуализировать складки и сборки характеристической поверхности при проектировании на плоскость переменных (x, y) или убедиться, что отображение проектирования особенностей не имеет;
- 7) построить максимальную область существования классического решения задачи Коши — однозначную проекцию характеристической поверхности на плоскость переменных (x, y) ;
- 8) найти точки разрушения решения задачи Коши, выяснить их характер (blow-up или градиентная катастрофа) или убедиться, что решение не разрушается.

Ресурсы для решения задания #3

1. **Материалы** практической темы «Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка».
2. **Пример** решения задания #3.
3. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка: учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999: <http://new.math.msu.su/diffur/pde-first.pdf>
4. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

Номер варианта студента / студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 38**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или 20.01.25 (upd: 25.01.25) —1— Версия 0.9

высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Дедлайн для всех групп — **24.05.25, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1. $\begin{cases} (y-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y+u)\frac{\partial u}{\partial y} = x-y, \\ u = x, y = 0. \end{cases}$	Вариант 2 $\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = y, \\ u = x^3, y = x^2. \end{cases}$
Вариант 3. $\begin{cases} (y-u)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-x)\frac{\partial u}{\partial y} = x-y, \\ u = -x, y = -x. \end{cases}$	Вариант 4. $\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + (u^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} = -x, \\ u = 2x, y = x^2. \end{cases}$
Вариант 5. $\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} + xy^2\frac{\partial u}{\partial y} = u - xyu^2, \\ u = xy, x = y^2. \end{cases}$	Вариант 6. $\begin{cases} (2y-u)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u = x + 2y, x = y^3. \end{cases}$
Вариант 7. $\begin{cases} xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -xy, \\ u = x^3, y = x^2. \end{cases}$	Вариант 8. $\begin{cases} (y + 2u^2)\frac{\partial u}{\partial x} - 2x^2u\frac{\partial u}{\partial y} = x^2, \\ u = x, y = x^2. \end{cases}$
Вариант 9. $\begin{cases} (x + y^2 + u^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u = 1, x = -y^2. \end{cases}$	Вариант 10. $\begin{cases} (u^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = -y, \\ u = y, y = x^2. \end{cases}$
Вариант 11. $\begin{cases} (y + xu)\frac{\partial u}{\partial x} + (x + yu)\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - u^2, \\ u = x, x + y = 1. \end{cases}$	Вариант 12. $\begin{cases} \sin^2 x \frac{\partial u}{\partial x} + \tan u \frac{\partial u}{\partial y} = \cos^2 u, \\ u = 0, x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
Вариант 13. $\begin{cases} xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u)\frac{\partial u}{\partial y} = yu, \\ u = \frac{1}{2}x, y = x. \end{cases}$	Вариант 14. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + (2y - u)\frac{\partial u}{\partial y} = y + 2u, \\ u = 2y, x = y^2. \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} x^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 u \frac{\partial u}{\partial y} = x + y, \\ u = y, x = 1. \end{cases}$	Вариант 16. $\begin{cases} (u - 2x) \frac{\partial u}{\partial x} + (ux + uy + 2x - u) \frac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u = 2x, y = x^2. \end{cases}$
Вариант 17. $\begin{cases} 2y^4 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = x \sqrt{u^2 + 1}, \\ u = x, y = 1. \end{cases}$	Вариант 18. $\begin{cases} (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2, \\ u = 1, x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
Вариант 19. $\begin{cases} x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (xyu - 2u^2) \frac{\partial u}{\partial y} = xu, \\ u = x, y = x^2. \end{cases}$	Вариант 20. $\begin{cases} (x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \\ u = 1 - 2x, y = x - 2. \end{cases}$
Вариант 21. $\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u = -y, x = 1. \end{cases}$	Вариант 22. $\begin{cases} xy^3 \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 u^2 \frac{\partial u}{\partial y} = y^3 u, \\ u^2 = y, x^2 = y^3. \end{cases}$
Вариант 23. $\begin{cases} yu \frac{\partial u}{\partial x} - xu \frac{\partial u}{\partial y} = e^u, \\ uy = 1, x = y - 1. \end{cases}$	Вариант 24. $\begin{cases} (u - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy, \\ ux = 1, xy = 1. \end{cases}$
Вариант 25. $\begin{cases} -x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (xy - 2u^2) \frac{\partial u}{\partial y} = xu, \\ u = 1, xy = 2. \end{cases}$	Вариант 26. $\begin{cases} (x + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y + u) \frac{\partial u}{\partial y} = x + y, \\ u = -y, x + y = 1. \end{cases}$
Вариант 27. $\begin{cases} 2xu \frac{\partial u}{\partial x} + 2yu \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2, \\ u = 0, x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$	Вариант 28. $\begin{cases} u(x + u) \frac{\partial u}{\partial x} - y(y + u) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u^2 = y, x = 1. \end{cases}$

Вариант 29. $\begin{cases} yu \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u = x^2, y = 1. \end{cases}$	Вариант 30. $\begin{cases} xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = xy\sqrt{u^2 + 1}, \\ u^2 = 1 - x^2 - y^2, x = y^3. \end{cases}$
Вариант 31. $\begin{cases} x(y^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - y(u^2 + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u(x^2 + y^2), \\ u^2 = x^2 + y^2, y = x. \end{cases}$	Вариант 32. $\begin{cases} (x^2 - y^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 2xu, \\ u^2 = 1 - y^2, x = 0. \end{cases}$
Вариант 33. $\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = y, \\ u = x + 2y, 2x + 3y = 0. \end{cases}$	Вариант 34. $\begin{cases} y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2, \\ ux = x - 1, y = x. \end{cases}$
Вариант 35. $\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + (xu + y) \frac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u = \frac{x + y}{2}, x^2 + xy = 2. \end{cases}$	Вариант 36. $\begin{cases} yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy, \\ u^2 = 1 - y^2, x = 1. \end{cases}$
Вариант 37. $\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = 2xu, \\ uy = 1, y = 2 - x. \end{cases}$	Вариант 38. $\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = (x - 3y)u^2, \\ uy + 1 = 0, x = 1. \end{cases}$