

ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

Тема 3 «Особенности классических решений квазилинейных уравнений первого порядка»

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u), \\ (x, y, u) \in \Gamma, \end{cases}$$

где a , b и f — известные гладкие функции в области $D \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma \subset D$ — гладкая кривая. Требуется:

- 1) записать систему характеристик в нормальной форме Коши и в симметрической форме Коши;
- 2) найти общее решение системы характеристик;
- 3) получить два независимых интеграла системы характеристик в окрестности Γ ;
- 4) разбить кривую Γ на участки, где выполнено условие трансверсальности;
- 5) для одного (на выбор) участка трансверсальности получить характеристическую поверхность задачи Коши в неявном и в параметрическом виде, визуализировать её на компьютере;
- 6) исследовать и визуализировать складки и сборки характеристической поверхности при проектировании на плоскость переменных (x, y) или убедиться, что отображение проектирования особенностей не имеет;
- 7) построить максимальную область существования классического решения задачи Коши — однозначную проекцию характеристической поверхности на плоскость переменных (x, y) ;

- 8) найти точки разрушения решения задачи Коши, выяснить их характер (blow-up или градиентная катастрофа) или убедиться, что решение не разрушается.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + (u - x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \\ u = x^2 + x, y = 2x^2. \end{cases}$$

1) Запишем систему характеристик в нормальной форме Коши и в симметрической форме Коши:

- нормальная форма (точка — производная по фазовому времени p):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = u - x^2, \\ \dot{u} = 2x. \end{cases} \quad (1)$$

Характеристическое векторное поле имеет вид

$$\vec{c} = \vec{e}_x + (u - x^2) \vec{e}_y + 2x \vec{e}_z.$$

- симметрическая форма:

$$dp = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{u - x^2} = \frac{du}{2x}. \quad (2)$$

2) Найдём общее решение системы характеристик. Первое уравнение системы (1) немедленно интегрируется: $x = p + x_0$. Тогда третье уравнение системы имеет вид $\dot{u} = 2(p + x_0)$, а его общее решение $u = p^2 + 2px_0 + u_0$. Наконец, второе

уравнение есть $\dot{y} = u_0 - x_0^2$, а его общее решение $y = (u_0 - x_0^2)p + y_0$. Имеем, таким образом, общее решение системы (1):

$$\begin{cases} x = p + x_0, \\ y = (u_0 - x_0^2)p + y_0, \\ u = p^2 + 2px_0 + u_0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $u_0 = u(0)$ — начальная точка.

3) Получим два независимых интеграла системы характеристик в окрестности

$$\Gamma = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : u = x^2 + x, y = 2x^2, -\infty < x < +\infty\}.$$

Из уравнения $\frac{dx}{1} = \frac{du}{2x}$ следует, что $du - 2xdx = 0$, откуда

$u - x^2 = C_1$. Понижая порядок системы с помощью этого

интеграла, имеем $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{C_1} \Leftrightarrow dy - C_1 dx = 0 \Leftrightarrow y - C_1 x = C_2$

или $y - ux + x^3 = C_2$. Итак, $I(x, y, u) = u - x^2$,

$J(x, y, u) = y - ux + x^3$. Проверим независимость функций I и J . Имеем

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial y} & \frac{\partial I}{\partial u} \\ \frac{\partial J}{\partial x} & \frac{\partial J}{\partial y} & \frac{\partial J}{\partial u} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} -2x & 0 & 1 \\ 3x^2 - u & 1 & -x \end{pmatrix} = 2.$$

Предъявим общее решения квазилинейного уравнения в неявном виде с указанием условий на произвольную функцию Φ . Пусть $(x_0, y_0, u_0)^T \in \mathbb{R}^3$ — точка, в окрестности которой необходимо указать общее решение уравнения. В силу независимости полученных интегралов общее решение имеет неявный вид

$$\Phi(u - x^2, y - ux + x^3) = 0. \quad (4)$$

Условие на функцию $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, гарантирующие разрешимость уравнения (4), следует из теоремы о неявной функции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I} - x \frac{\partial \Phi}{\partial J} \Big|_{(x_0, y_0, u_0)} \neq 0.$$

4) Проверим условие трансверсальности задачи Коши на кривой Γ . Для этого введём параметрическое представление Γ :

$$\begin{cases} x_0 = q, \\ y_0 = 2q^2, \\ u_0 = q^2 + q, \\ -\infty < q < +\infty. \end{cases} \quad (5)$$

Условие трансверсальности заключается в том, 1) что характеристический вектор на кривой Γ $\vec{c} = \vec{e}_x + q\vec{e}_y + 2q\vec{e}_u$ и касательный вектор к кривой Γ $\vec{\tau} = \vec{e}_x + 4q\vec{e}_y + (2q + 1)\vec{e}_u$ не должны быть коллинеарными. Поскольку

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & q & 2q \\ 1 & 4q & 2q + 1 \end{pmatrix} = 2$$

условие трансверсальности выполнено, гладкая интегральная поверхность существует в окрестности каждой точки $\in \Gamma$. 2) Плоскость $\text{Lin}(\vec{c}, \vec{\tau})$ не является вертикальной $\Leftrightarrow$ третья координата $\vec{\nu} = [\vec{c}, \vec{\tau}]$ не равна нулю:

$$\vec{\nu} = [\vec{c}, \vec{\tau}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_u \\ 1 & q & 2q \\ 1 & 4q & 2q + 1 \end{vmatrix} = \dots + 3q\vec{e}_u.$$

Так как минор $M_{1,2}^{1,2} = 3q$ вышеупомянутой матрицы не равен нулю при $q \neq 0$, то условие трансверсальности выполнено для $\Gamma_+ = \{(x, y, u) \in \Gamma : q > 0\}$ и $\Gamma_- = \{(x, y, u) \in \Gamma : q < 0\}$.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности каждой точки, принадлежащей начальной кривой

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x^2, -1 < x < 0\} \text{ — проекция дуги} \\ \tilde{\Gamma}_- = \{(x, y, u) \in \Gamma : -1 < q < 0\}.$$

5) Получим характеристическую поверхность задачи Коши в неявном и в параметрическом виде,

визуализируем её. Для получения неявного уравнения подставим в общее решение (4) $\Phi(u - x^2, y - ux + x^3) = 0$ начальное условие $y = 2x^2, u = x^2 + x$: $\Phi(x, x^2) = 0$ для всех $x \in (-1, 0)$. Отсюда $\Phi(I, J) = J - I^2$. Тогда неявное уравнение для характеристической поверхности есть

$$y - ux + x^3 - (u - x^2)^2 = 0 \text{ или}$$

$$u^2 + (x - 2x^2)u + x^4 - x^3 - y = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) легко разрешить относительно u (как квадратное), однако мы не будем это использовать. Для того, чтобы получить параметрическое представление характеристической поверхности, подставим в общее решение (3) $x_0 = q, y_0 = 2q^2$ и $u_0 = q^2 + q$:

$$\begin{cases} x = p + q, \\ y = qp + 2q^2, \\ u = p^2 + 2pq + q^2 + q. \end{cases} \quad (7)$$

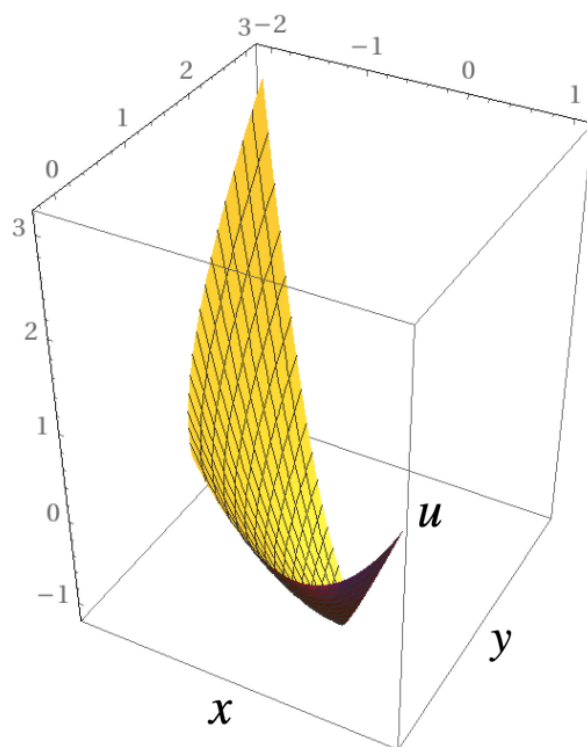
Отметим, что параметр $q \in (-1, 0)$, а параметр $p \in (-\infty, \infty)$, если речь идёт о всей характеристической поверхности, а не только о той её части, которая соответствует классическому решению задачи Коши (см. далее). Для визуализации

поверхности (7)

воспользуемся <https://www.wolframalpha.com>. В ответ на команду

*3d parametric plot ($p+q$,
 $q*p+2*q^2$,
 $p^2+2*p*q+q^2+q$), $p=-1$ to 1 ,
 $q=-1$ to 0*

получим визуализацию характеристической поверхности. Замечание: лучше взять небольшой интервал изменения параметра p в окрестности нуля, например, $p \in (-1, 1)$.



6–7) Исследуем и визуализируем складки характеристической поверхности при проектировании на плоскость переменных (x, y) , построим максимальную область существования и единственности классического решения задачи Коши — однозначную проекцию характеристической поверхности на плоскость переменных (x, y) .

Рассмотрим отображение проектирования характеристической поверхности S , заданной параметризацией (7), на плоскость независимых переменных (x, y) . Если $p = 0$, то имеем однозначную проекцию части кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ на плоскость (x, y) , которая даёт кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Необходимо найти максимальный кусок поверхности S , который содержит часть Γ и однозначно проектируется на плоскость (x, y) .

Дифференциал отображения проекции есть линейный оператор между касательной плоскостью к S и плоскостью (x, y) . Касательная плоскость к S в точке, которая задаётся параметрами (q, p) , есть линейная оболочка касательных векторов

$$\vec{\xi} = \frac{\partial x}{\partial q} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial q} \vec{e}_u = \vec{e}_x + (p + 4q) \vec{e}_y + (2p + 2q + 1) \vec{e}_u$$

$$\text{и } \vec{\eta} = \frac{\partial x}{\partial p} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial p} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial p} \vec{e}_u = \vec{e}_x + q \vec{e}_y + (2p + 2q) \vec{e}_u.$$

Отметим, во-первых, что векторы $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ линейно независимы для любых (q, p) . Действительно, рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & p + 4q & 2p + 2q + 1 \\ 1 & q & 2p + 2q \end{pmatrix}.$$

Минор $M_{1,2}^{1,2} = -p - 3q \neq 0$, если $p \neq -3q$. Если же $p = -3q$, то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & q & -4q + 1 \\ 1 & q & -4q \end{pmatrix} \neq 0,$$

потому что $M_{1,2}^{1,3} = -1$ для любых q . Это означает, что поверхность S гладкая (бесконечно дифференцируемая, аналитическая и даже алгебраическая), у неё нет особых точек.

Однако дифференциал отображения проектирования $\text{proj} : S \rightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2$ не всегда является линейным изоморфизмом.

Найдём те точки поверхности, для которых $\text{Ker } d(\text{proj}) \neq 0$.

Они соответствуют таким значениям параметров (q, p) , при которых $M_{1,2}^{1,2} = -p - 3q = 0$. Дадим геометрическую

трактовку этого факта. Нетривиальность ядра дифференциала отображения проектирования эквивалентна вертикальности

касательной плоскости $\text{Lin}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \Leftrightarrow$ третья координата векторного произведения

$$[\vec{\xi}, \vec{\eta}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_u \\ 1 & p + 4q & 2p + 2q + 1 \\ 1 & q & 2p + 2q \end{vmatrix}$$

равна нулю или $M_{1,2}^{1,2} = -p - 3q = 0 \Leftrightarrow p = -3q$.

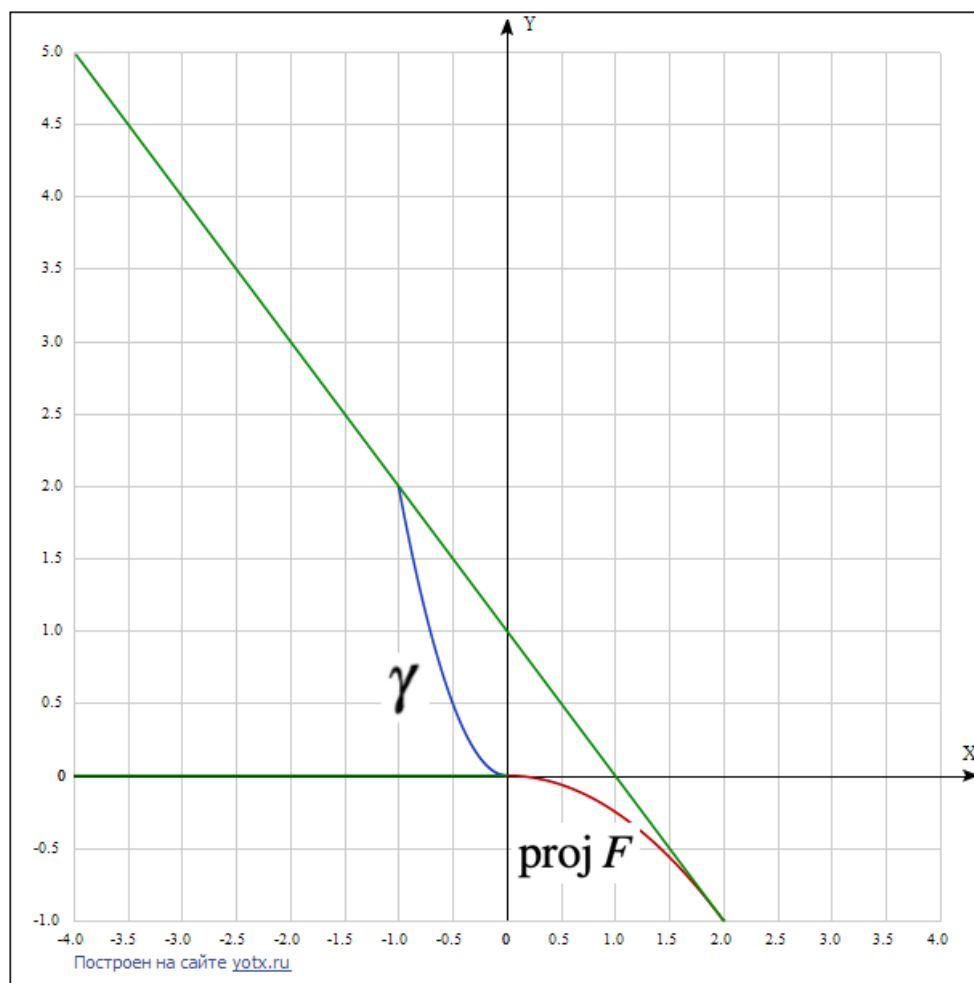
Великий американский математик Хасслер [Уитни](#) (1907–1989) дал классификацию особенностей гладких отображений двумерных гладких многообразий. Следуя ему, будем называть множество точек поверхности S с $\text{Ker } d(\text{proj}) \neq 0$, *кривой складок*. В нашем случае кривая складок $F \subset S$ имеет параметризацию

$$x = -2q, y = -q^2, u = 4q^2 + q, q \in (-1, 0).$$

Построим на плоскости (x, y) проекцию кривой складок $\text{proj } F = \{x = -2q, y = -q^2, -1 < q < 0\}$ вместе с начальной кривой $\gamma = \{x = q, y = 2q^2, -1 < q < 0\}$.

Осуществим это построение с помощью сервиса <https://yotx.ru>.

На следующем рисунке синим цветом изображена начальная кривая γ , красным — кривая складок $\text{proj } F$. Максимальная область существования единственного классического решения задачи Коши (она же однозначная проекция характеристической поверхности на плоскость переменных (x, y)) образована проекциями полухарактеристик, проходящим через точки части Γ , до тех пор, пока они не коснутся $\text{proj } F$ (также у проекций характеристик может быть точка возврата на $\text{proj } F$, но не в этом примере).



В нашем случае проекции характеристик, проходящих через точки части Γ , есть прямые

$$\begin{cases} x = p + q, \\ y = qp + 2q^2, \end{cases}$$

$q \in (-1, 0)$, которые все касаются $\text{proj } F$. Поэтому область существования и единственности образована семейством лучей, представляющих собой проекции полухарактеристик. На рисунке зелёным цветом выделены крайние лучи из этого семейства. Например, наклонный луч соответствует значению $q = -1$ и касается $\text{proj } F$ в точке $(2, -1)$. Граница максимальной области существования и единственности Ω состоит из (замыканий) зелёных лучей и (замыкания) красной проекции кривой складок. В аналитическом виде

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, y > -\frac{1}{4}x^2\theta(x), x < 2 \right\},$$

где θ — функция Хевисайда.

8) Найдём точки разрушения решения задачи Коши и выясним их характер. Напомним, что под *blow-up* понимается следующая ситуация: при

$$\Omega \ni (x, y) \rightarrow (x_*, y_*) \in \partial\Omega,$$

где Ω — область существования и единственности, $u(x, y) \rightarrow \infty$ (либо решение не является ограниченным в $U(x_*, y_*) \cap \Omega$, где $U(x_*, y_*)$ — некоторая окрестность точки (x_*, y_*) , так называемой *точки blow-up*). В нашем случае blow-up отсутствует, потому что функция $u = p^2 + 2pq + q^2 + q$ из параметризации (7) определена при всех p, q .

Под *градиентной катастрофой* понимается другая ситуация: при

$$\Omega \ni (x, y) \rightarrow (x_*, y_*) \in \partial\Omega,$$

где Ω — область существования и единственности, $u(x, y) \rightarrow u_*$ (имеет конечный предел), но $\nabla u(x, y) \rightarrow \infty$ или не ограничен.

Легко видеть, что точки градиентной катастрофы и проекции складки характеристической поверхности — это одно и то же. Таким образом, точки градиентной катастрофы есть дуга параболы $\overline{\text{proj } F} = \{x = -2q, y = -q^2, -1 \leq q \leq 0\}$. При стремлении к точкам $\overline{\text{proj } F}$ со стороны Ω градиент решения стремится к бесконечности. В других точках границы области существования и единственности решение не разрушается, однако его можно продолжить за пределы Ω бесконечным множеством способов (нарушается единственность).

Приложение к примеру

(см. оригинальный MAPLE-документ на странице курса в LMS; free-trial версия MAPLE доступна по [ссылке](#) и работает 15 дней)

restart;

with(plots) :

1-2) Найдём общее решение системы характеристик.

*coeffa := 1; coeffb := u(t) - x(t)^2; rightf := 2*x(t);*

coeffa := 1

coeffb := u(t) - x(t)^2

*rightf := 2*x(t)*

sdechar := diff(x(t), t) = coeffa, diff(y(t), t) = coeffb, diff(u(t), t) = rightf;

sdechar := $\frac{d}{dt} x(t) = 1, \frac{d}{dt} y(t) = u(t) - x(t)^2, \frac{d}{dt} u(t) = 2x(t)$

dsolve([sdechar]);

$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= t + _C3, \\ u(t) &= \int 2x(t) dt + _C2, \\ y(t) &= \int (u(t) - x(t)^2) dt + _C1 \end{aligned} \right\}$

Лучше искать общее решение, задавая (произвольные) начальные условия.

icschar := x(0) = x0, y(0) = y0, u(0) = u0;

icschar := x(0) = x0, y(0) = y0, u(0) = u0

charsol := dsolve([sdechar, icschar]);

charsol := $\{u(t) = t^2 + 2tx_0 + u_0, x(t) = t + x_0, y(t) = (-x_0^2 + u_0)t + y_0\}$

3) Проверим, что функции $I=I(x,y,u)$ и $J=J(x,y,u)$ действительно служат интегралами системы характеристик.

Ii := u - x^2;

Ii := $-x^2 + u$

*Ji := y - u*x + x^3;*

Ji := $x^3 - ux + y$

Subs1 := {x = x(t), y = y(t), u = u(t)};

Subs1 := {u = u(t), x = x(t), y = y(t)}

*simplify(subs(Subs1, diff(Ii, x)) * coeffa + subs(Subs1, diff(Ii, y)) * coeffb + subs(Subs1, diff(Ii, u)) * rightf);*

0

$\Rightarrow I = I(x, y, u)$ — интеграл системы характеристик.

*simplify(subs(Subs1, diff(Ji, x)) * coeffa + subs(Subs1, diff(Ji, y)) * coeffb + subs(Subs1, diff(Ji, u)) * rightf);*

$\Rightarrow J = J(x, y, u)$ — интеграл системы характеристик.

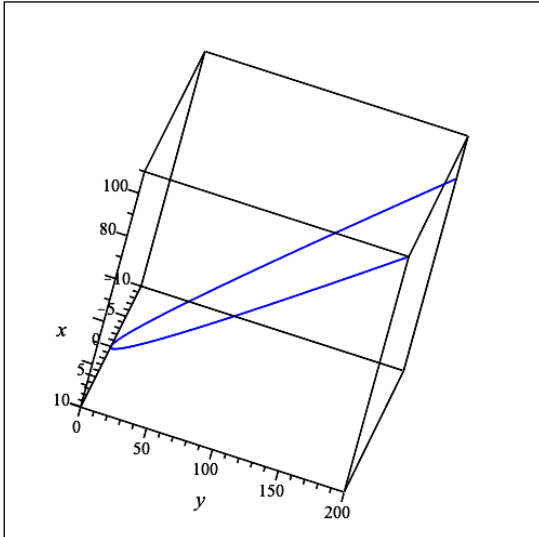
4) Проверим условие transversальности на начальной кривой. Сначала параметризуем её.

$$\text{GammaPar} := q, 2 \cdot q^2, q^2 + q;$$

$$\text{GammaPar} := q, 2 q^2, q^2 + q$$

Построим эту кривую в 3D пространстве.

$$\text{spacecurve}([\text{GammaPar}], q = -10..10, \text{size} = [\text{default}, \text{square}], \text{orientation} = [40, 60, 30], \text{color} = [\text{blue}]);$$



$$\text{Subs2} := \{x(t) = \text{GammaPar}[1], y(t) = \text{GammaPar}[2], u(t) = \text{GammaPar}[3]\};$$

$$\text{Subs2} := \{u(t) = q^2 + q, x(t) = q, y(t) = 2 q^2\}$$

Зададим характеристический вектор:

$$\text{charvec} := [\text{subs}(\text{Subs2}, \text{coeffa}), \text{subs}(\text{Subs2}, \text{coeffb}), \text{subs}(\text{Subs2}, \text{rightf})];$$

$$\text{charvec} := [1, q, 2 q]$$

Получим касательный вектор:

$$\text{tauvec} := [\text{diff}(\text{GammaPar}[1], q), \text{diff}(\text{GammaPar}[2], q), \text{diff}(\text{GammaPar}[3], q)];$$

$$\text{tauvec} := [1, 4 q, 2 q + 1]$$

За условие transversальности отвечает следующий минор:

$$\text{M12trans} := \text{simplify}(\text{charvec}[1] \cdot \text{tauvec}[2] - \text{charvec}[2] \cdot \text{tauvec}[1]);$$

$$\text{M12trans} := 3 q$$

Следовательно, условие transversальности выполнено для всех q , которые не равны нулю.

5) Визуализируем интегральную поверхность.

Получим параметризацию интегральной поверхности:

$$\text{Subs3} := x0 = \text{GammaPar}[1], y0 = \text{GammaPar}[2], u0 = \text{GammaPar}[3];$$

$$\text{Subs3} := x0 = q, y0 = 2 q^2, u0 = q^2 + q$$

$$\text{SurPar} := \text{subs}(\{\text{Subs3}\}, \text{charsol});$$

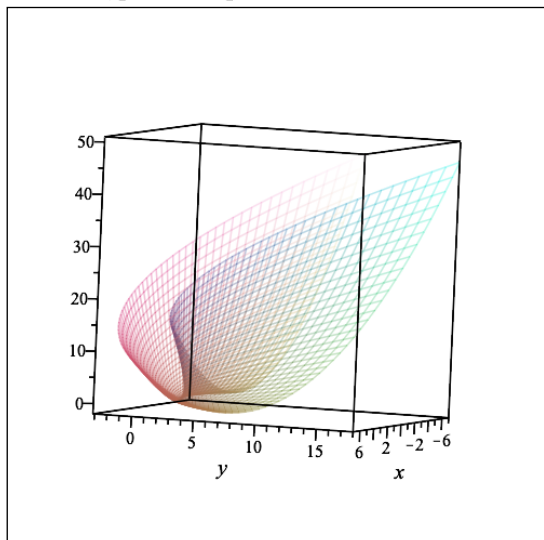
$$\text{SurPar} := \{u(t) = q^2 + 2 t q + t^2 + q, x(t) = t + q, y(t) = 2 q^2 + t q\}$$

Построим произвольный кусок интегральной поверхности.

$$\text{SurPlot} := \text{eval}(x(t), \text{SurPar}), \text{eval}(y(t), \text{SurPar}), \text{eval}(u(t), \text{SurPar});$$

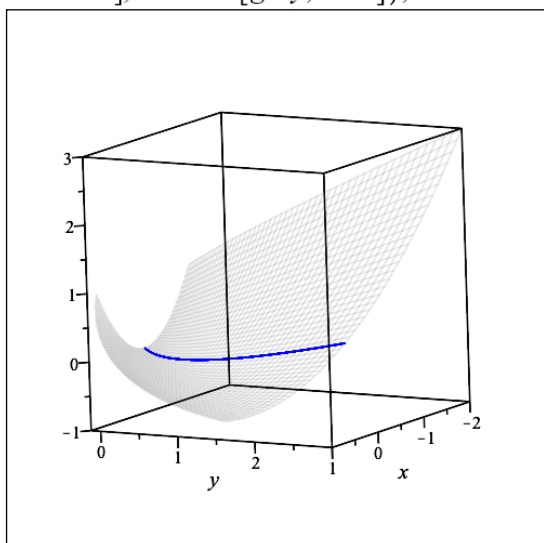
$$\text{SurPlot} := t + q, 2 q^2 + q t, q^2 + 2 q t + t^2 + q$$

```
plot3d([SurPlot], q = -2 .. 2, t = -5 .. 5, size = [default, square], orientation = [20, 80, 0], style = line);
```



Рассмотрим дугу начальной кривой, на которой выполнено условие трансверсальности. Пусть это будет дуга, соответствующая значению параметра q из интервала $(-1, 0)$. Построим кусок характеристической поверхности для этой дуги.

```
plot3d([SurPlot], [GammaPar], q = -1 .. 0, t = -1 .. 1, size = [default, square], orientation = [20, 80, -10], color = [grey, blue]);
```



Серым цветом показана характеристическая поверхность, синим — дуга начальной кривой Γ . Характеристическая поверхность проходит через дугу начальной кривой Γ .

6-8) Прежде всего найдём кривую складок на интегральной поверхности. Для этого получим касательные векторы:

```
xivec := [diff(SurPlot[1], q), diff(SurPlot[2], q), diff(SurPlot[3], q)];
```

$$xivec := [1, 4q + t, 2q + 2t + 1]$$

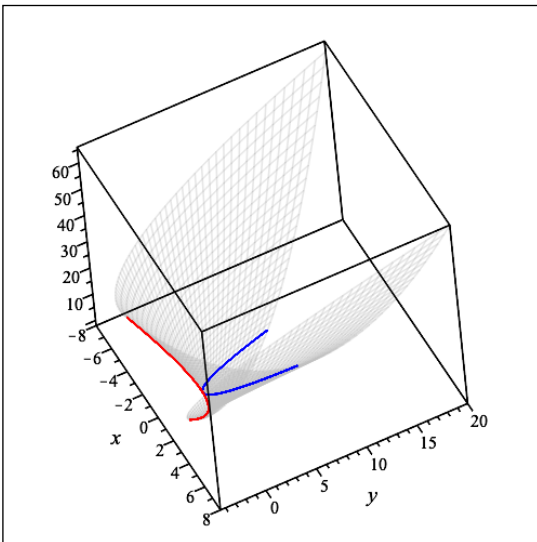
```
etavec := [diff(SurPlot[1], t), diff(SurPlot[2], t), diff(SurPlot[3], t)];
etavec := [1, q, 2 q + 2 t]
M12fold := simplify(xivec[1]·etavec[2] - xivec[2]·etavec[1]);
M12fold := -3 q - t
```

Кривая складок задаётся уравнением $M12fold=0$. Отсюда $t = -3q$.

```
Subs4 := {t = -3·q};
Subs4 := {t = -3 q}
```

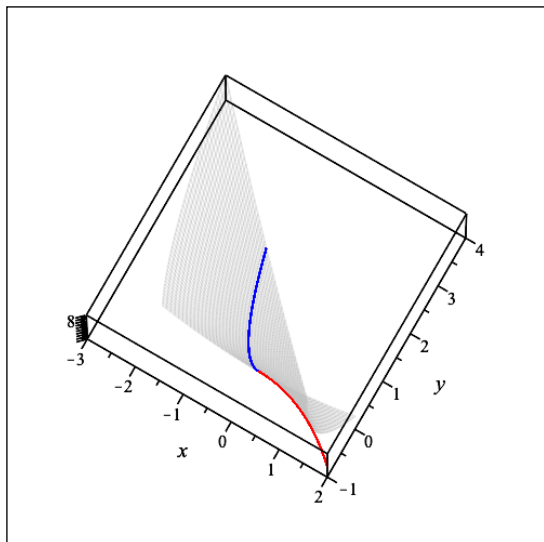
Построим кривую складок вместе с начальной кривой Γ на интегральной поверхности в 3D пространстве.

```
FoldPar := subs(Subs4, SurPlot[1]), subs(Subs4, SurPlot[2]), subs(Subs4, SurPlot[3]);
FoldPar := -2 q, -q2, 4 q2 + q
plot3d([SurPlot], [GammaPar], [FoldPar], q = -2 .. 2, t = -6 .. 6, size = [default, square], orientation
= [-30, 40, -5], color = [grey, blue, red]);
```



Кривая складок (**красная**) и начальная кривая Γ (**синяя**) соприкасаются в точке $(0,0,0)$ (где, кстати, нарушено условие трансверсальности). Теперь построим только тот кусок характеристической поверхности, что проходит через выбранную дугу начальной кривой Γ (когда параметр q изменяется от -1 до 0).

```
plot3d([SurPlot], [GammaPar], [FoldPar], q = -1 .. 0, t = -2 .. 2, size = [default, square], orientation
= [-60, 5, 0], color = [grey, blue, red]);
```



Мы видим, что данный кусок не имеет однозначной проекции на плоскость Oxy . Чтобы найти максимальный кусок характеристической поверхности, проходящий через дугу кривой Γ , допускающий однозначную проекцию на плоскость Oxy , обратимся к проекциям кривой складок и дуги кривой Γ (обозначим проекцию дуги Γ через γ).

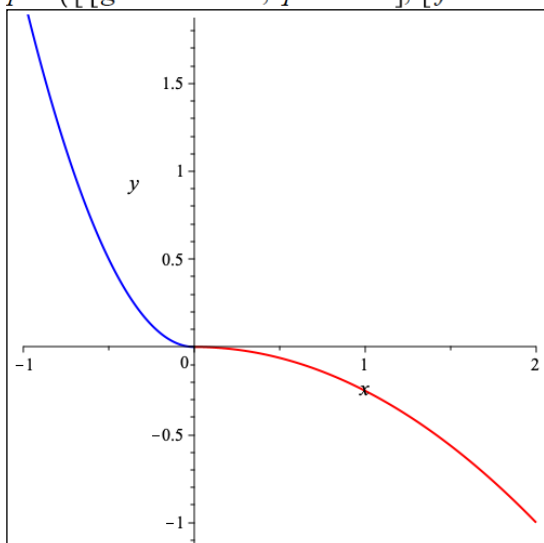
```
gammacurve := GammaPar[1], GammaPar[2];
```

```
gammacurve := q, 2 q2
```

```
foldcurve := FoldPar[1], FoldPar[2];
```

```
foldcurve := -2 q, -q2
```

```
plot([ [gammacurve, q = -1 .. 0], [foldcurve, q = -1 .. 0], size = [default, square], color = [blue, red]);
```



Построим проекции некоторого количества характеристик, проходящих через дугу Γ , и посмотрим, как они соотносятся с проекцией кривой складок.

```
charcurves := { };
```

```
charcurves := ∅
```

```
for j from 1 by 1 to 5 do charcurves := charcurves union { [subs( { q = -j/5 }, SurPlot[1] ), subs( { q = -j/5 }, SurPlot[2] ), t = -0.1 .. 3 ] } end do;
```

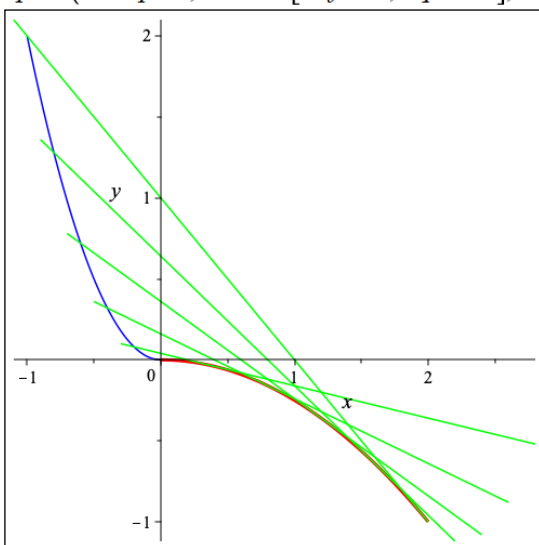
```
charplot := convert( charcurves, list);
```

```
charplot := [ [t - 1, -t + 2, t = -0.1 .. 3], [t - 4/5, -4t/5 + 32/25, t = -0.1 .. 3], [t - 3/5, -3t/5 + 18/25, t = -0.1 .. 3], [t - 2/5, -2t/5 + 8/25, t = -0.1 .. 3], [t - 1/5, -t/5 + 2/25, t = -0.1 .. 3] ]
```

```
charplot := [ [gammacurve, q = -1 .. 0], [foldcurve, q = -1 .. 0], op(charplot) ];
```

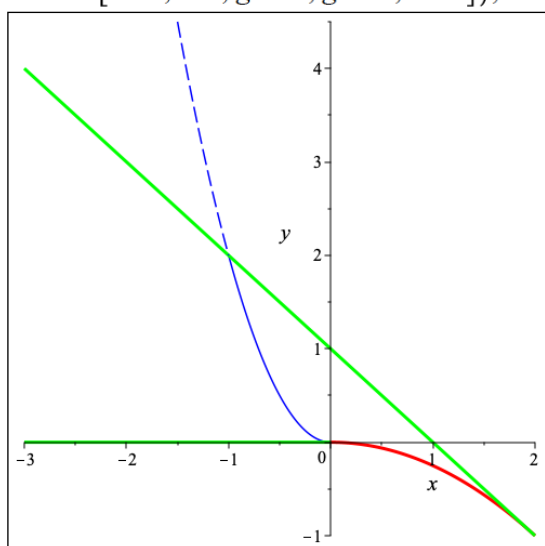
```
charplot := [ [q, 2q^2, q = -1 .. 0], [-2q, -q^2, q = -1 .. 0], [t - 1, -t + 2, t = -0.1 .. 3], [t - 4/5, -4t/5 + 32/25, t = -0.1 .. 3], [t - 3/5, -3t/5 + 18/25, t = -0.1 .. 3], [t - 2/5, -2t/5 + 8/25, t = -0.1 .. 3], [t - 1/5, -t/5 + 2/25, t = -0.1 .. 3] ]
```

```
plot(charplot, size = [default, square], color = [blue, red, green, green, green, green, green]);
```



Таким образом, проекции всех характеристик (**зелёных** на графике выше) касаются проекции кривой складок (красная на графике выше). Теперь построим максимальную область Ω существования и единственности решения задачи Коши для γ . Она будет ограничена **красной** кривой, соответствующей проекциям складок характеристической поверхности и двумя полухарактеристикам: первая проходит через конец $(0,0)$ дуги γ , вторая — через конец $(-1,2)$.

```
plot([ [gammacurve, q = -1 .. 0], [foldcurve, q = -1 .. 0], [subs({q = 0}, SurPlot[1]), subs({q = 0}, SurPlot[2]), t = -3 .. 0], [subs({q = -1}, SurPlot[1]), subs({q = -1}, SurPlot[2]), t = -2 .. subs({q = -1}, eval(t, Subs4))], [gammacurve, q = -1.5 .. -1]], size = [default, square], color = [blue, red, green, green, blue]);
```



Классическое решение задачи Коши не продолжается однозначно через границу области Ω . Через **красную** часть границы (соответствующей проекции дуги кривой складок) оно не продолжается, потому что терпит градиентную катастрофу, т.е. градиент решения стремится к бесконечности, при стремлении из области Ω к красной части границы. При стремлении к **зелёным** (полу)характеристикам с решением не происходит ничего плохого, однако его можно бесконечным числом способом продолжить через зелёную границу, поэтому единственность решения задачи Коши нарушается.