

Лекция #3

Тема 1 "Пространства С. Л. Соболева"

СТР. 9-14 из лекции #2

Мы не будем подробно разбирать
док-во Теоремы 1.7 (полное
док-во см. в [1] и [2]), но
рассмотрим его схему.

1) Модельное продолжение (для
какой-нибудь простой об-ти):
из полукуба в куб.

2) Локальное продолжение для
произвольной области

3) С помощью разбиения единицы

локальные продолжения склеиваются
и получается глобальное утверждение.

Лемма 1.4 (о плотности в кубе).

Введём обозначения:

$K_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i=1, \dots, n\}$ - куб
с ребром $2a$;

$K_a^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ - верхний полукуб;

$K_a^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$ - нижний полукуб;

$K_a^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ - $(n-1)$ -мерный
куб с ребром $2a$.

Пр-во $C^\infty(\bar{K}_a)$ всюду плотно в $H^k(K_a)$.

Док-во см. в [1], [2] и презентацион-
темы "Пространства Соболева" (часть 1).

Лемма 1.5 (о продолжении из полукуба

в куб). Пусть $u \in H^k(K_a^-)$. Тогда $\exists$

$v \in H^k(K_a)$ со св-ми: 1) $v|_{K_a^-} = u$;

2) $\|v\|_{H^k(K_a)} \leq C \|u\|_{H^k(K_a^-)}$, причём

константа C не зависит от φ -ии u .

Док-во можно найти в [1], [2] (но
там могут быть две леммы вместо

отной леммы 1.5 - для класс. пр-в $C^k(\bar{K}_a)$, $C^k(\bar{K}_a)$ и, вторая лемма, для пр-в Соболева).

Теорема 1.8 (принцип разбегания единицы). Пусть $\mathbb{R}^n \supset K$ - компакт, $\bigcup_{i \in I} U_i$ - покрытие K открытыми в $\mathbb{R}^n$ подмн-ми (I - мн-во индексов, может быть бесконечное). Тогда $\exists$ конечная система $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ основных ф-ий, такая, что:

- 1) $\varphi_j(x) \geq 0$ для $\forall x \ j=1, \dots, N, x \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $\forall j \in \{1, \dots, N\} \ \exists i \in I : \text{supp } \varphi_j \subset U_i$;
- 3) $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \leq 1$ для $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
- 4) $\forall x \in K \ \varphi_1(x) + \dots + \varphi_N(x) = 1$.

Замечание: семейство ф-ий $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ называется разбеганием единицы, подчинённым покрытию $\{U_i\}_{i \in I}$ компакта K .

Теперь обсудим следствия
Теоремы 1.7 о продолжении —
Теорему о плотности и теорему
о сепарабельности.

Теорема 1.9 (теорема о плотности).

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$. Тогда
 $C^\infty(\bar{\Omega})$ всюду плотно в пространстве
Соболева k -го порядка $H^k(\Omega)$.

Теорема 1.10 (теорема о сепара-
бельности). Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$.
Тогда пространство $H^k(\Omega)$ сепарабельно.

Док-ва теорем 1.9 и 1.10 можно
найти в [1], [2] и презентацион-
ной теме 1 "Пространства Соболева"
на baikov.org/pde.

§ 5. Теорема о компактности

Вспомним некоторые определения и факты из ФАНа (теория операторов).

Определение 1 Пусть X, Y — норм. пр-ва. Линейный оп-р $A: X \rightarrow Y$ компактный, если он отображает всякое ограниченное мн-во в предкомпактное.

Очевидно, компактный оп-р является ограниченным, следовательно, непрерывным. Обратное верно, если пр-во Y конечномерно. Есть эквивалентное определение.

Определение 2 Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ между норм. пр-ми X и Y называется компактным, если он отображает всякую слабо сходящуюся пос-ть в X в ильно сходящуюся пос-ть в Y .

Теорема 1.11 (о компактности, частный случай т. Реллиха-Гординга).

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Тогда
оп-р вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$
компактны.

Есть два основных способа док-ть
Теоремы 1.11: первый основан на
нер-ве Пуанкаре и теореме
Арцела (см. О.А. Ладыженская.
Краевые задачи математической
физики. М.: Наука, 1973); второй на
преобразовании Фурье и теореме
Лебега об ограниченной сходимости
(см. [2]). Недостаток времени не
позволяет разобрать даже одно из
этих док-в.

Замечания к Теореме 1.11

- 1) Условие на $\partial\Omega \in C^1$ можно
ослабить (см. R. A. Adams.
Sobolev Spaces. NY: Academic Press, 1975).
- 2) Для произв. неогр. об-тей Теорема
1.11 неверна (нетрудно, построить
контрпример для $\Omega = \mathbb{R}^n$).