

Лекция #2

Тема 1 "Пространства С.Л. Соболева"

Стр. 23-29 из лекции #1

Примеры 2. Покажем, что ф-я
 $u(x_1, x_2) = \text{sign}(x_1)$ не имеет
о.н. $u_{x_1} \in L_2(\Omega)$, где $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Предположим, что
 $\exists v \in L_2(\Omega)$ и $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} v \varphi dx_1 dx_2 = - \iint_{\Omega} u \varphi_{x_1} dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ supp } \varphi \subset \Omega_+ &\Rightarrow 0 = - \iint_{\Omega} u \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 = \\ &= - \iint_{\Omega_+} u \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega_+} v \varphi dx_1 dx_2 \\ &\Rightarrow (\text{по л. Д-Р}) v|_{\Omega_+} = 0. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ supp } \varphi \subset \Omega_- : \text{аналогично } v|_{\Omega_-} = 0.$$

Но тогда $v = 0$ (н.в. в Ω), откуда

$$\iint_{\Omega} u \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 = - \iint_{\Omega} v \varphi dx_1 dx_2 = 0$$

 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, а с другой стороны

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} u \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 &= \iint_{\Omega_+} \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 - \\ &- \iint_{\Omega_-} \varphi_{x_1} dx_1 dx_2 = -2 \int_{\Omega \cap \{x_1=0\}} \varphi(0, x_2) dx_2 \end{aligned}$$

и всегда обращается в нуль.
 Полученное противоречие означает,
 что $\nexists u_{x_1} \in L_{2,loc}(\Omega)$. На самом
 деле, $u_{x_1} = \delta(x_1)$, но дельта- φ -я
 не пр-ву Лебега, т.к. является
 сингулярной обобщ. φ -и.

Однако, $\exists u_{x_1 x_2} = 0 \in L_2(\Omega)$.
 Действительно, $\iint_{\Omega} u \varphi_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 =$
 $= -2 \int_{-1}^1 \varphi_{x_2}(0, x_2) dx_2 = 0$ т.к. φ -
 финитная φ -я.

Этот эффект можно усилить:
 Э равная нулю вторая смеш.
 производная ф-ии $u(x_1, x_2) =$
 $= \text{sign}(x_1) + \text{sign}(x_2)$ в той же
 об-ти Ω , в то время как обе
 производные первого н-ка $\notin L_2(\Omega)$.

Лемма 1.3 (уср-ие об-дм. произв.)
 Пусть $u \in L_2(\Omega)$, $\exists$ о.н. $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$.

$\mathcal{U}_h$ - оп-р усреднения радиуса $h > 0$.
 Тогда $\forall x \in \Omega \text{ dist}(x, \partial\Omega) > h$

$$(1.8) \quad D^\alpha(\mathcal{U}_h u)(x) = \mathcal{U}_h(D^\alpha u)(x).$$

Кроме того, $\|D^\alpha \mathcal{U}_h u - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega')} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
 где любой $\Omega' \subset \Omega$. Если

$\text{supp } u = K \subset \Omega$, K - компакт,

? $h < \text{dist}(K, \partial\Omega)$, то

рав-во (1.8) справедливо

для всех $x \in \Omega$, а сх-ть имеет место
 и для $\Omega' = \Omega$.

Замечания

- 1) Док-во леммы 1.3 есть в
[1] В.П. Михлилов. Дифференциальные
ур-я с частными производными.
М.: Наука, 1976.
[2] Л.Е. Россовский, А.Л. Скубаевский.
Введение в теорию дифференциальных
ур-ий с частными производными.
М.: Изд-во МЦНМО, 2021.

2) Что такое supp -носитель ф-ии из пр-ва
Лебега? Пусть $u \in L_{2, \text{loc}}(\Omega)$,
тогда $\text{supp } u = \Omega \setminus Q$, где Q - объеди-
нение всех открытых $\Omega' \subset \Omega$,
 $u = 0$ н.в. в Ω' .

Утверждение 1.2. Ф-я $u \in L_{2, \text{loc}}(\Omega)$
постоянна $\Leftrightarrow$ все о.п. первого н-ка
ф-ии u равны нулю.
Доказательство - упражнение.

Теорема 1.5 (критерий существова-
ния о.п.) Пусть $u \in L_{2, \text{loc}}(\Omega)$, $\mathcal{U}_n u$ -

ее усреднения, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Мн-во
 $\{D^\alpha(\varphi_h u)\}$ ограничено в $L_2(\Omega')$ и
любой $\Omega' \in \Omega$ и всех $h < h(\Omega') \Leftrightarrow$
 $\exists$ о.н. $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$.

Доказательство см. в [2].

утверждение 1.3 (не самое простое
св-во о.н.) Пусть Ω_1, Ω_2 - об-ти в
 $\mathbb{R}^n$, $\Omega_1 \cup \Omega_2$ - тоже об-ть в $\mathbb{R}^n$,
 $u \in L_2(\Omega)$; обозначим $u_1 = u|_{\Omega_1}$,
 $u_2 = u|_{\Omega_2}$. Если $\exists$ о.н. $D^\alpha u_1 \in L_2(\Omega_1)$,
 $D^\alpha u_2 \in L_2(\Omega_2)$, то $\exists$ о.н. $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$.

Док-во. $\forall x \in \Omega \exists B$ -шар с центром
в x т.ч. 1) если $x \in \Omega_1$, то $\bar{B} \subset \Omega_1$;
2) если $x \in \Omega_2$, то $\bar{B} \subset \Omega_2$.

Зафиксируем произвольную попо-ть
 $Q \in \Omega$. Имеем покрытие компактного
мн-ва $\bar{Q}$ открытыми шарами. Выделим
конечное подпокрытие $B_1, \dots, B_N$. Пусть
 $Q_1(Q_2)$ - объединение тех шаров из списка
 $B_1, \dots, B_N$, центры которых принадлежат
 $\Omega_1(\Omega_2)$. Имеем $\bar{Q}_1 \subset \Omega_1$, $\bar{Q}_2 \subset \Omega_2$,

$$Q \subset Q_1 \cup Q_2.$$

Поскольку $\exists$ о.н. $D^\alpha u_j \in L_2(Q_j)$ ($j=1,2$)
 мн-во $\{D^\alpha \mathcal{I}_h u_j\}$ ограничено в
 $L_2(Q_j)$ для всех малых h . В силу
 очевидного пер-ва $\|D^\alpha \mathcal{I}_h u\|_{L_2(Q)}^2 \leq$
 $\leq \|D^\alpha \mathcal{I}_h u\|_{L_2(Q_1)}^2 + \|D^\alpha \mathcal{I}_h u\|_{L_2(Q_2)}^2$

мн-во $\{D^\alpha \mathcal{I}_h u\}$ будет ограниченным и
 в $L_2(Q)$. В силу произвольности Q
 $\exists$ о.н. $D^\alpha u$ вытекает из теоремы
 1.5. В каждой из областей Q_j ($j=1,2$)
 $D^\alpha u$ совпадает с $D^\alpha u_j$ и тем самым
 $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ 

О.н. и конечные разности

$u \in L_2(\Omega)$, продолжим u нулем в
 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$. Определим оператор
конечной разности

$$(\delta_h^j u)(x) = \frac{u(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - u(x)}{h}.$$

Очевидно, что $\delta_h^j u \in L_2(\Omega)$. Более того,

если $\text{supp } u \subset \Omega$, и достаточно мало,
 $\text{supp}(\delta_h^j u) \subset \Omega$.

утверждение 1.4. (конечно-разностный

аналог ф-лы икт-я по частям).

Пусть $u, v \in L_2(\Omega)$ (обе продолжены
нулем в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$), тогда $\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0$

$$(\delta_h^j u, v)_{L_2(\Omega)} = - (u, \delta_{-h}^j v)_{L_2(\Omega)}.$$

Доказательство — упражнение.

Теорема 1.6 (конечные разности и о.н.)

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $u \in L_2(\Omega)$, $\text{supp } u \subset \Omega$
(т.е. u — финитная квадр. икт. в Ω ф-я).

1) Если $\exists$ о.н. $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega)$, то

$$\|\delta_h^j u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u_{x_j}\|_{L_2(\Omega)} \text{ для}$$

всех дост. малых $h \neq 0$ и

$$\|\delta_h^j u - u_{x_j}\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (1.9)$$

2) Если $\exists C > 0$ т.ч. пер-во $\|\delta_h^j u\| \leq C$
выполняется для всех дост. малых $h \neq 0$,
то $\exists$ о.н. $u_{x_j} \in L_2(\Omega)$, причём имеет
место оценка $\|u_{x_j}\| \leq C$ и (1.9).

Замечание: п. 2 теоремы - аналог теоремы 1.5 об условии Э.о.н. (Только в этой теореме о.н. могут быть любых п-ов)
Доказательство см. в [2].

§3. Пространства Соболева: определение и простые свойства

Определение 1.4 (основное определение теор.). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - область, $k \in \mathbb{N}$. Пр-во Соболева $H^k(\Omega)$ k -го порядка суть векторное пр-во, состоящее из всех ф-ий $u \in L_2(\Omega)$, имеющих о.н. из $L_2(\Omega)$ до k -го ин-ка включительно:

$$H^k(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq k \\ \exists \text{ о.н. } D^\alpha u \in L_2(\Omega)\}.$$

В пр-ве $H^k(\Omega)$ скалярное произведение задаётся формулой (1.10)

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Замечания. 1) Альтернативное обозначение $W_2^k(\Omega) = H^k(\Omega)$ использовать не будем.

2) Скалярное произведение в $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \text{ где}$$

$$(\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

3) Очевидно, что $C^k(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$.

Будет ли $H^k(\Omega)$ пополнением $C^k(\bar{\Omega})$ относительно нормы, порождённой скалярным произведением (1.10)?

Простые свойства $H^k(\Omega)$

Утверждение 1.5. $H^k(\Omega)$ — гильб. пр-во.

Док-во. Пусть $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ф.н.п. в $H^k(\Omega)$, т.е. $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \quad \{D^{\alpha} u_j\}_{j=1}^{\infty}$ —

ф.н.п. в $L_2(\Omega)$. Из полноты $L_2(\Omega)$ вытекает, что $\exists v \in L_2(\Omega)$,

$v_{\alpha} \in L_2(\Omega)$ — предель $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}, \{D^{\alpha} u_j\}_{j=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega)$ соответственно ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq k$).

Покажем, что v_{α} есть о.н. $D^{\alpha} v$. Для

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем

$$(1.11) \quad (u_j, D^{\alpha} \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (D^{\alpha} u_j, \varphi).$$

Поскольку скалярное произведение

непрерывно, в равенстве (1.11) можно перейти к пределу $j \rightarrow \infty$:

$$(v, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (v_j, \varphi).$$

Последнее означает, что v_α — о.н. v ,
сотв. мультииндекс $\alpha \Rightarrow \|D^\alpha v - D^\alpha v_j\| \rightarrow 0$
при $j \rightarrow \infty$ для $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq k \Leftrightarrow$
 $\|v - v_j\|_{H^k(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ 

1. Если $u \in H^k(\Omega)$, $\Omega' \subset \Omega$ (подоб-ть),
то $u|_{\Omega'} \in H^k(\Omega')$.

2. Если $u_j \in H^k(\Omega_j)$, $j=1,2$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$,
 $u \in L_2(\Omega)$, $u_1 = u|_{\Omega_1}$, $u_2 = u|_{\Omega_2}$, то
 $u \in H^k(\Omega)$.

3. Пусть $u \in H^k(\Omega)$, $m \in C^k(\bar{\Omega})$,
тогда $mu \in H^k(\Omega)$. Другими словами,
 $H^k(\Omega)$ — модуль над кольцом $C^k(\bar{\Omega})$.

Более того, умножение на функцию
 m — ограниченный оператор

$H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\Omega)$, т.е. $\exists C = C(m)$

$$\forall u \in H^k(\Omega) \quad \|mu\|_{H^k(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Док-ва свойств 1-3 — упражнение.

Замечание о пучках

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - область. Предпучком $\mathcal{F}$ векторных пространств в области Ω называется следующий набор данных:

(i) пр-во $\mathcal{F}(Q)$ для каждого открытого $Q \subset \Omega$ ($\mathcal{F}(Q)$ - пр-во сечений пучка $\mathcal{F}$ над Q);

(ii) линейное отображение $\rho_{21}: \mathcal{F}(Q_1) \rightarrow \mathcal{F}(Q_2)$ для каждой пары вложенных открытых подмножеств $Q_2 \subset Q_1$ (ρ_{21} - от-е сужения) эти данные должны удовлетворять следующей аксиоме

F_1 : если даны $Q_3 \subset Q_2 \subset Q_1 \subset \Omega$ (все подмн-ва открытые), то $\rho_{31}: \mathcal{F}(Q_1) \rightarrow \mathcal{F}(Q_3)$ - композиция $\rho_{21}: \mathcal{F}(Q_1) \rightarrow \mathcal{F}(Q_2)$ и $\rho_{32}: \mathcal{F}(Q_2) \rightarrow \mathcal{F}(Q_3)$, т.е. $\rho_{31} = \rho_{32} \circ \rho_{21}$.

Предпучок $\mathcal{F}$ векторных пр-в в об-ти Ω называется пучком, если он удовлетворяет ещё двум аксиомам.
 F_2 (аксиома отделимости): если для

Любое открытое покрытие Q_j ;
 открытого $Q \subset \Omega$ сужение сечения
 $s \in F(Q)$ на Q_j равно нулю, т.е. $\forall j$
 $s|_{Q_j} = \rho_{Q \rightarrow Q_j}(s) = 0$, то $s = 0$ в $F(Q)$;
 F_3 (аксиома склейки): пусть $\{Q_j\}$ —
 любое открытое покрытие открытого
 $Q \subset \Omega$, $\forall j$ задано сечение $s_j \in F(Q_j)$,
 причём $\forall i, j$ $s_i|_{Q_i \cap Q_j} = s_j|_{Q_i \cap Q_j}$,
 тогда $\exists s \in F(Q)$ т.ч. $\forall j$ $s|_{Q_j} = s_j$.

Из аксиом следует, что $F(\emptyset)$ —
 нульмерное векторное пр-во (выраж-
 нение). Аналогично определяется
 нуль нормированных (в частности,
 евклидовых) пространств; в этом
 случае линейные отображения сужения
 должны быть непрерывными.

Теперь мы можем сказать, что
 $H^k(\Omega)$ — нуль гильбертовых пространств
 в области Ω .

§ 4. Теорема о продолжении и её следствия

Отвлечённая от пр-в Гёделя и обсудим теоретико-множественные вопросы. Сечение сюръективного отображения $f: X \rightarrow Y$ называется отображение $g: Y \rightarrow X$, правое обратное где $f: fg = I_Y$ — тожд. от-е $Y \rightarrow Y$.

Аксиома выбора утверждает, что всякое сюръективное отображение имеет сечение (оно единственно $\Leftrightarrow f$ — инъекция).

Если X, Y — векторные пр-ва над $\mathbb{R}$, $f: X \rightarrow Y$ — сюръективное линейное отображение, то по аксиоме выбора $\exists g: Y \rightarrow X$ — линейное отображение, правое обратное для f .

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \Omega$ (лодоб-ть), тогда по св-ву 1 определено сужение $H^k(\Omega) \rightarrow H^k(Q)$ — огра-

линейное отображение между гильбертовыми пр-ми $H^k(\Omega)$ и $H^k(Q)$. Оператором продолжения $C: H^k(Q) \rightarrow H^k(\Omega)$ называется сечение оп-ра сужения. Надо чтобы C был обратным линейным оператором. Следующая теорема утверждает существование оп-ра продолжения при определённых усл-х на Ω и Q .

Теорема 1.7 (Теорема о фиттном продолжении). Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \Omega$, $\partial Q \in C^k$. Тогда $\exists$ оп-р $C: H^k(Q) \rightarrow H^k(\Omega)$ со свойствами:

1) $\forall u \in H^k(Q) \quad (u|_Q = u)$ (т.е. C - оп-р продолжения);

2) $\exists M > 0 \quad \forall u \in H^k(Q)$

$$\|Cu\|_{H^k(\Omega)} \leq M \|u\|_{H^k(Q)}$$

(т.е. C - обратный мет-ый оп-р);

3) $\exists K \subset \Omega$, K -компакт, $Q \subset K$,
 $\forall u \in H^k(Q) \quad \text{supp } u \subset K$ (C - оп-р фиттного продолжения).