

Уравнения в частных производных
Задача Коши для эволюционных
уравнений

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

<https://baikov.org/pde>

Содержание

- 1. Задача Гурса и её разрешимость**
2. Функция Римана 2D гиперболического оператора
3. Задача Коши для 2D гиперболического уравнения
4. Задача Коши для волнового уравнения: классические и обобщённые решения
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

2D линейные операторы второго порядка

Рассмотрим в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ функции A, B, C, a, b, c и линейный оператор второго порядка, имеющий вид

$$\mathcal{L}u = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + au_x + bu_y + cu, \quad (5.1)$$

и соответствующее уравнение

$$\mathcal{L}u = F(x, y). \quad (5.2)$$

Когда оператор (5.1) и уравнение (5.2) имеют гиперболический тип? Для определения типа и последующего приведения к каноническому виду рассмотрим уравнение характеристик

$$A dy^2 - 2B dy dx + C dx^2 = 0. \quad (5.3)$$

Канонический вид 2D гиперболического уравнения второго порядка

Оператор (5.1) (уравнение (5.2)) имеет 1) *эллиптический тип*, если $B^2 - AC < 0$; 2) *параболический тип*, если $B^2 - AC = 0$, $A + C \neq 0$; 3) *гиперболический тип*, если $B^2 - AC > 0$. В окрестности точки гиперболического типа существует C^2 -диффеоморфная замена независимых переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, приводящая уравнение (5.2) к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + \tilde{a}u_{\xi} + \tilde{b}u_{\eta} + \tilde{c}u = \tilde{f}(\xi, \eta).$$

Будем считать в пп. 1—3, что такая замена сделана с самого начала, и в операторе (5.1) (уравнении (5.2)) $A = 0$, $2B = 1$, $C = 0$.

Волновой оператор и волновое уравнение

Частным случаем уравнения (5.2) служит *волновое уравнение* с одной пространственной переменной x :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (5.4)$$

где t — переменная времени, $0 < a = \text{const}$ — скорость распространения волн. Уравнение (5.4) имеет обобщение для случая двух, трёх и т.д. пространственных переменных. Волновой оператор

(оператор Д'Аламбера) $\square_a u = u_{tt} - a^2 \Delta u$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$

— оператор Лапласа относительно пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$, $\square_a u = f(x, t)$ — волновое уравнение.

Постановка задачи Гурса

Пусть $\mathcal{L}u = u_{xy} + au_x + bu_y + cu$ — гиперболический оператор в каноническом виде, $a, b, c \in C(\Omega)$ — известные функции.

Пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$, I — промежуток на оси Ox , содержащий точку x_0 , J — промежуток на оси Oy , содержащий y_0 ,

$D = I \times J \subset \Omega$. Задача Гурса в D имеет вид

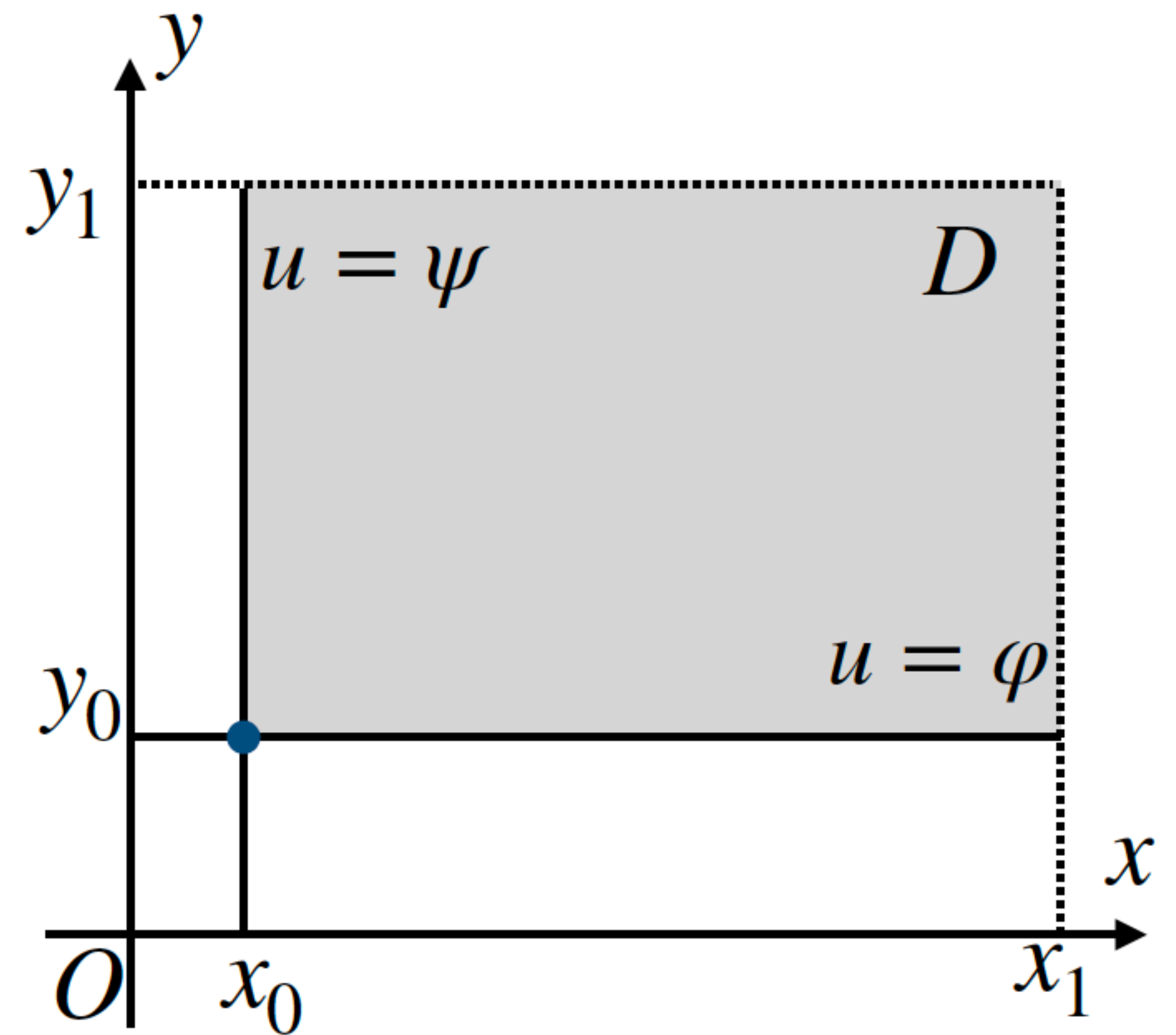
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, y), (x, y) \in D, \\ u|_{y=y_0} = \varphi(x), u|_{x=x_0} = \psi(y), \end{cases} \quad (5.5)$$

где f — известная функция в D , φ — известная функция на I , ψ — известная функция на J .

Классическое решение. Необходимые условия существования

Далее предположим, что $I = (x_0, x_1)$, $J = (y_0, y_1)$, так что D — прямоугольник. Классическим решением задачи Гурса (6.5) называется функция $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющая условиям Гурса и уравнению $\mathcal{L}u = f$ в D . Необходимые условия существования:

- $f \in C(D)$, $\varphi \in C(\bar{I})$, $\psi \in C(\bar{J})$;
- $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ — условие согласования.



Задача Гурса: преобразование к системе интегральных уравнений

Пусть $v_y = u_{xy}$, $w_x = u_{yx}$, заменим в уравнении $\mathcal{L}u = f$ переменную x на s и проинтегрируем его по s от x_0 до x :

$$\int_{x_0}^x u_{sy} ds = - \int_{x_0}^x a(s, y) u_s ds - \int_{x_0}^x b(s, y) u_y ds - \int_{x_0}^x c(s, y) u ds + \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$
$$\Rightarrow w(x, y) - w(x_0, y) = - \int_{x_0}^x a(s, y) v(s, y) ds - \int_{x_0}^x b(s, y) w(s, y) ds -$$
$$- \int_{x_0}^x c(s, y) u(s, y) ds + \int_{x_0}^x f(s, y) ds. \text{ Но } w(x_0, y) = u_y(x_0, y) = \psi'(y),$$

Задача Гурса: преобразование к системе интегральных уравнений

Кроме того,

$$u(x, y) = u(x_0, y) + \int_{x_0}^x u_s(s, y) ds = \psi(y) + \int_{x_0}^x v(s, y) ds,$$

а также

$$u(x, y) = u(x, y_0) + \int_{y_0}^y u_t(x, t) dt = \varphi(x) + \int_{y_0}^y w(x, t) dt. \quad (5.8)$$

Оставим одно из этих уравнений, например уравнение (5.8), и получим систему (5.8), (5.7) и (5.6) интегральных уравнений относительно функций u , v и w .

Эквивалентность задачи Гурс

Эквивалентность задачи Гурса и системы интегральных уравнений

Дифференцируем уравнение (5.7) по y :

$$v_y = -a(x, y)v - b(x, y)w - c(x, y)u + f(x, y).$$

Отсюда, $v_y = w_x \Rightarrow v(x, y) = v(x, y_0) + \int_{y_0}^y w_x(x, t)dt = \varphi'(x) +$
 $+ \int_{y_0}^y u_{xt}(x, t)dt = \varphi'(x) + u_x(x, y) - u_x(x, y_0) = u_x(x, y)$. Отсюда

$u_{xy} = -a(x, y)u_x - b(x, y)u_y - c(x, y)u + f(x, y)$. Интегрируем уравнение $u_y(x_0, y) = w(x_0, y)$: $u(x_0, y) - \varphi(x_0) = \psi(y) - \psi(y_0) \Rightarrow u(x_0, y) = \psi(y)$, что и требовалось.

Операторное уравнение

Рассмотрим пространство

$$C(\bar{D})^3 = \left\{ \mathbf{U} = (u, v, w)^T : u, v, w \in C(\bar{D}) \right\}$$

с нормой $\|\mathbf{U}\| = \|u\|_{C(\bar{D})} + \|v\|_{C(\bar{D})} + \|w\|_{C(\bar{D})}$, и оператор Гурса в этом пространстве $G : C(\bar{D})^3 \rightarrow C(\bar{D})^3$, действующий на вектор-функцию $\mathbf{U} = (u, v, w)^T \in C(\bar{D})^3$ по формуле

$$\begin{aligned} GU_1(x, y) &= \int_{y_0}^y w(x, t) dt, \quad GU_2(x, y) = - \int_{y_0}^y c(x, t) u(x, t) dt - \int_{y_0}^y a(x, t) v(x, t) dt - \int_{y_0}^y b(x, t) w(x, t) dt, \\ GU_3(x, y) &= - \int_{x_0}^x c(s, y) u(s, y) ds - \int_{x_0}^x a(s, y) v(s, y) ds - \int_{x_0}^x b(s, y) w(s, y) ds. \end{aligned}$$

Операторное уравнение. Метод Пикара

Введём ещё известную вектор-функцию $\Phi \in C(\overline{D})^3$

$$\Phi(x, y) = \left(\varphi(x), \varphi'(x) + \int_{y_0}^y f(x, t) dt, \psi'(y) + \int_{x_0}^x f(s, y) ds \right)^T.$$

Тогда интегральную систему (5.6)—(5.8) можно переписать в виде *операторного уравнения*

$$\mathbf{U} = G\mathbf{U} + \Phi. \quad (5.9)$$

Организуем итерационный процесс — метод Пикара построения решения уравнения (5.9):

- за *нулевое приближение* примем $\mathbf{U}^0 = \Phi$;

Норма оператора. Сжимающие операторы

- Нетрудно показать, что ограниченность оператора и непрерывность (по Коши или Гейне) эквивалентны.
- *Нормой* ограниченного оператора $A : N \rightarrow N$ называется наименьшая константа C из определения 5.1. Другими словами, $\|A\| = \sup \{ \|Au\| : u \in N, \|u\| \leq 1 \}$.
- Линейный ограниченный оператор $A : N \rightarrow N$ называется *сжимающим*, если $\|A\| < 1$.

Вернёмся к операторному уравнению (5.9), немного перепишем его:

$$(I - G)U = \Phi. \quad (5.10)$$

Геометрическая прогрессия

Теорема об экв

Оценка нормы оператора Гурса

Оценим норму оператора Гурса, для чего рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{U} = (u, v, w)^T \in C(\bar{D})^3$ с $\|\mathbf{U}\| = \|u\|_{C(\bar{D})} + \|v\|_{C(\bar{D})} + \|w\|_{C(\bar{D})} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|G\mathbf{U}_1\|_{C(\bar{D})} &= \max_{(x,y)^T \in \bar{D}} \left| \int_{y_0}^y w(x, t) dt \right| \leq \max_{(x,y)^T \in \bar{D}} \int_{y_0}^y |w(x, t)| dt = \\ &= \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \int_{y_0}^{y_1} |w(x, t)| dt \leq \int_{y_0}^{y_1} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |w(x, t)| dt \leq \\ &\leq (y_1 - y_0) \max_{(x,t)^T \in \bar{D}} |w(x, t)| = (y_1 - y_0) \|w\|_{C(\bar{D})}; \end{aligned}$$

Оценка нормы оператора Гурса

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \|G\mathbf{U}_2\|_{C(\overline{D})} &= \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| -\int_{y_0}^y c(x,t)u(x,t)dt - \int_{y_0}^y a(x,t)v(x,t)dt - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{y_0}^y b(x,t)w(x,t)dt \right| \leq \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| \int_{y_0}^y c(x,t)u(x,t)dt \right| + \\
 &\quad + \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| \int_{y_0}^y a(x,t)v(x,t)dt \right| + \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| \int_{y_0}^y b(x,t)w(x,t)dt \right| \leq \\
 &\leq (y_1 - y_0) \left(\|c\|_{C(\overline{D})} \|u\|_{C(\overline{D})} + \|a\|_{C(\overline{D})} \|v\|_{C(\overline{D})} + \|b\|_{C(\overline{D})} \|w\|_{C(\overline{D})} \right);
 \end{aligned}$$

Оценка

Локальный результат

Задача

#

Содержание

