

Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка

1. Линейные уравнения первого порядка

Задача 4.1. Найти общее решение и решить задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = -xy, \\ u|_{x=2} = y^2 + 1, \quad -\infty < y < +\infty. \end{cases}$$

Решение.

$$1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = -xy \Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy.$$

Составим *расширенную систему характеристик* (точка означает производную по фазовому времени t):

$$\text{нормальная форма Коши} \quad \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{u} = u - xy; \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy} \quad \text{— симметрическая форма Коши.}$$

- 2) Найдём общее решение системы характеристик: $x = x_0 e^t$, где $x_0 = x(0)$; $y = y_0 e^t$, где $y_0 = y(0)$. Подставим в третье уравнение: $\dot{u} = u - x_0 y_0 e^{2t} \Leftrightarrow \dot{u} - u = -x_0 y_0 e^{2t}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $u = C e^t$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $u = A e^{2t}$. Подстановка даёт $A = -x_0 y_0$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения есть $u = C e^t - x_0 y_0 e^{2t}$. $t = 0$: $u_0 = u(0) = C - x_0 y_0 \Rightarrow$

$C = u_0 - x_0 y_0$. Следовательно, $u = (u_0 - x_0 y_0) e^t - x_0 y_0 e^{2t}$.
Общее решение расширенной системы характеристик есть

$$\begin{cases} x = x_0 e^t, \\ y = y_0 e^t, \\ u = (u_0 - x_0 y_0) e^t - x_0 y_0 e^{2t}. \end{cases}$$

3) Найдём первый независимый интеграл: $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow$

$$d(\ln|x| - \ln|y|) = 0 \Rightarrow -\ln|x| + \ln|y| = -\tilde{C}_1 \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\tilde{C}_1 \Rightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = e^{-\tilde{C}_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm e^{-\tilde{C}_1} = C_1.$$

Заметим, что $y = 0$ — инвариантная плоскость, поэтому $C_1 = 0$ — допустимое значение константы. $y = C_1 x \Rightarrow$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u - C_1 x^2}.$$

4) Для нахождения интегрируемых комбинаций применяется следующее свойство равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = dt, \text{ то при любых коэффициентах}$$

$k_1, \dots, k_n$ (хотя бы один из которых не равен нулю) имеем

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = dt. \text{ Найдём этим способом}$$

другой интеграл, независимый от найденного выше:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{ydx + xdy + du}{yx + xy + u - xy} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(u + xy)}{u + xy} \Rightarrow d(\ln|u + xy| - \ln|x|) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\frac{u + xy}{x} = C_2. \text{ При } C_2 = 0 \text{ имеем } u + xy = 0 —$$

инвариантная поверхность. Существует ли нетривиальный (отличный от константы) интеграл расширенной системы характеристик (1), не имеющий

особенностей в $\mathbb{R}^3$? Единственное положение равновесия системы (1) — это точка $x = 0, y = 0, u = 0$. Легко видеть, что для любой начальной точки $(x_0, y_0, u_0)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0, u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Поэтому, если существует (непрерывный) интеграл во всём пространстве, то он должен принимать постоянное значение на каждой фазовой кривой системы (1) $\Rightarrow$ значение в любой точке $(x_0, y_0, u_0)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ равно значению в $O \Rightarrow$ интеграл тривиальный.

Вернёмся к уравнению:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy.$$

- 5) Запишем общее решение уравнения в параметрическом виде. Для этого рассмотрим задачу Коши более общего вида

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = -xy, \\ u|_{x=2} = \varphi(y), \quad -\infty < y < +\infty, \end{cases}$$

где $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ — произвольная начальная функция. Пусть $x_0 = 2, -\infty < y_0 < +\infty$, тогда $u_0 = \varphi(y_0)$. Общее решение расширенной системы характеристик в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = y_0 e^t, \\ u = (\varphi(y_0) + 2y_0) e^t - 2y_0 e^{2t}, \\ -\infty < t < +\infty, \quad -\infty < y_0 < +\infty. \end{cases}$$

Мы получили общее решение уравнения в параметрическом виде. Получим его в явном виде: $e^t = \frac{x}{2}, y_0 = \frac{y}{e^t} = \frac{2y}{x} \Rightarrow$

общее решение уравнения первого порядка в явном виде:

$$u = \left(\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{4y}{x} \right) \frac{x}{2} - \frac{y}{x} x^2 = \frac{x}{2} \varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y - xy.$$

Оно (вообще говоря) определено в полуплоскости $x > 0$.

Структура общего решения обычная для линейных уравнений — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим альтернативный способ получения общего решения уравнения. Для этого нужно взять нелинейную связку двух интегралов и приравнять её к нулю:

$$\Phi\left(\frac{u+xy}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{u+xy}{x} = \tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy$$

— это тоже общее решение уравнения в полуплоскости $x > 0$.

$$x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y \Rightarrow \tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{2y}{x}.$$

Пусть $\frac{y}{x} = z$, тогда $\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{2}\varphi(2z) + 2z$.

$$\begin{aligned} 5) \quad \varphi(y) = y^2 + 1 &\Rightarrow u = \frac{x}{2}\left(\frac{4y^2}{x^2} + 1\right) + 2y - xy = \\ &= \frac{2y^2}{x} + \frac{x}{2} + 2y - xy \text{ — решение задачи Коши.} \end{aligned}$$

Альтернативный метод: подставим общее решение

$$u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy \text{ в начальное условие } u|_{x=2} = y^2 + 1:$$

$$y^2 + 1 = 2\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) - 2y. \text{ Замена } y = 2z:$$

$$2\tilde{\varphi}(z) - 4z = 4z^2 + 1 \Rightarrow \tilde{\varphi}(z) = 2z^2 + 2z + \frac{1}{2}. \text{ Имеем}$$

$$\text{решение задачи Коши: } u = \frac{2y^2}{x} + \frac{x}{2} + 2y - xy.$$

- 6) Если взять всю прямую $x = 2$, то область влияния — это область определения решения задачи Коши, т.е. полуплоскость $x > 0$. Рассмотрим отрезок на этой прямой $x = 2$, $0 \leq y \leq 1$. Тогда область влияния — это область существования и единственности решения задачи Коши

для данного отрезка начальной прямой. Для построения области влияния следует через концы дуги начальной кривой провести характеристики $\Leftrightarrow$ через концы отрезка начальной прямой провести фазовые кривые системы

$$\dot{x} = x, \dot{y} = y.$$

Общее решение этой системы есть $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^t$. Нижний конец даёт характеристику $x = 2e^t$, $y = 0$ — луч,

представляющий собой положительную часть оси

Ox . Верхний конец даёт

характеристику $x = 2e^t$,

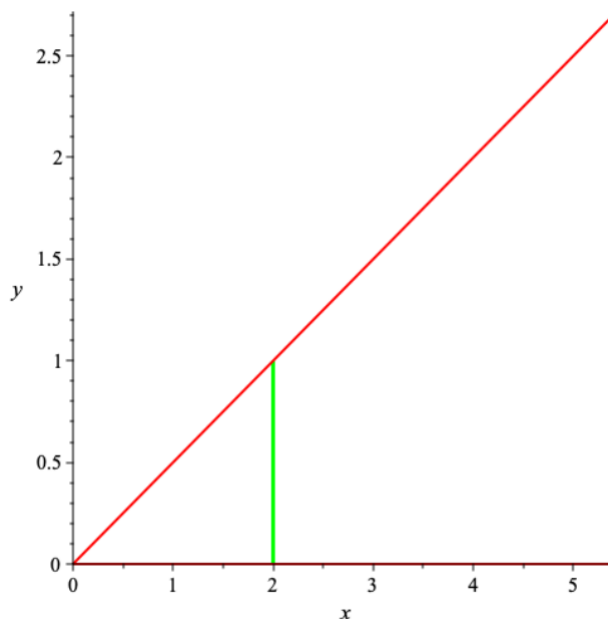
$$y = e^t \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x, x > 0$$
 —

тоже луч. Итак, область

влияния есть

$$D = \left\{ x > 0, 0 < y < \frac{x}{2} \right\}$$

— сектор плоскости.



Задача 4.2. Рассмотрим уравнение неразрывности на прямой, имеющее вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)\rho) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v(x, t)\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}\rho, \quad (2)$$

где $\rho = \rho(x, t)$ — неизвестная функция (плотность), $v = v(x, t)$

— известная функция (проекция скорости сплошной среды на

ось Ox), $v \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Уравнение (2) в дифференциальной

форме выражает закон сохранения некоторой скалярной

величины (массы, электрического заряда и т.д.). Наряду с

уравнением (2) рассмотрим стандартную задачу Коши для него

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)\rho) = 0, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0(x). \end{cases} \quad (3)$$

Исследуем решение задачи Коши (3).

Решение.

1) Запишем расширенную систему характеристик:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, t), \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{\rho} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rho. \end{cases} \quad (4)$$

2) Решим систему (4):

- $\dot{t} = 1 \Rightarrow t = p + t_0$. Так как $t_0 = 0$, то $t = p$;
- $\dot{x} = v(x, t), x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x = X(t, x_0)$ — решение этой задачи Коши, $X(0, x_0) = x_0$. Пример: $v(x, t) = \sin x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sin x \Rightarrow \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \int \frac{dx}{\sin x} = \int dt = t + \tilde{C} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \pm e^{\tilde{C}} e^t = C e^t \Rightarrow x = 2 \arctan \left(e^t \tan \frac{x_0}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. t = 0: x_0 = 2 \arctan(C) + 2\pi k \Rightarrow \frac{x_0}{2} = \arctan(C) + \pi k \Rightarrow C = \tan \frac{x_0}{2}.$

$$\bullet \quad \dot{\rho} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rho \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp \left(-\int_0^t v_x (X(s, x_0), s) ds \right).$$

3) Решим задачу Коши (3) в параметрическом виде:

$$x = X(t, x_0), \rho = \rho_0(x_0) \exp \left(-\int_0^t v_x (X(s, x_0), s) ds \right),$$

$-\infty < t < +\infty, -\infty < x_0 < +\infty$. Выразим x_0 через x, t :

$$x_0 = X_0(x, t) \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_0(X_0(x, t)) \exp \left(- \int_0^t v_x(X(s, X_0(x, t)), s) ds \right). \quad (5)$$

$$X_0(x, 0) = x.$$

Пусть $v(x, t) = v = \text{const}, \rho_0(x) = \chi(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$

функции Хевисайда, тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v\rho) = 0, \\ \rho|_{t=0} = \chi(x). \end{cases} \quad (6)$$

- $\dot{x} = v, x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x = vt + x_0$ — решение задачи Коши $\Rightarrow x_0 = X_0(x, t) = x - vt \Rightarrow \rho = \chi(x - vt)$. $x - vt = 0$ — характеристика $\Rightarrow \vec{v} = \mu(\vec{e}_x - v\vec{e}_t)$, где μ — нормирующий множитель.

$$\iint_H \chi(x - vt) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \varphi(x, 0) dx = 0;$$

$$\iint_{x-vt>0, t>0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \varphi(x, 0) dx = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(x, 0)(-1) dt + \int_0^{\infty} \varphi(vt, t) \nu_t k dt + \int_0^{\infty} v \varphi(vt, t) \nu_x k dt + \int_0^{\infty} \varphi(x, 0) dx = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(vt, t) (\nu_t + v \nu_x) k dt = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(vt, t) (-\mu v + v \mu) k dt = 0 \text{ — тождество.}$$

Рассмотрим общую задачу Коши для уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)\rho) = 0, t > 0, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0(x). \end{cases} \quad (3)$$

$\rho_0 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$. Возьмём пробную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\bar{H})$, H — верхняя полуплоскость, $\text{supp } \varphi \subset \bar{\Omega}$ — компакт, Ω — некоторый полудиск. Имеем

$$\begin{aligned} & \iint_H \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)\rho) \right) \varphi(x, t) dx dt = 0 \Rightarrow \\ & - \iint_H \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \iint_H v(x, t) \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) \varphi(x, 0) \nu_t dx + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) v(x, 0) \varphi(x, 0) \nu_x dx = 0 \Rightarrow \\ & - \iint_H \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \iint_H v(x, t) \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) \varphi(x, 0) (-1) dx = 0; \\ & \iint_H \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \iint_H v(x, t) \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0; \\ & \iint_H \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Определение. Функция $\rho \in L_{1,loc}(\bar{H})$ называется обобщённым решением задачи (3), если для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\bar{H})$ выполнено интегральное равенство (7).

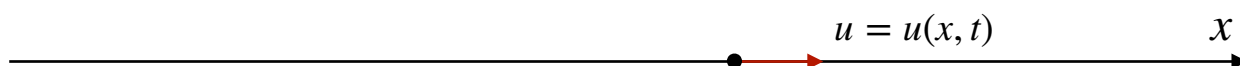
2. Квазилинейные уравнения первого порядка

Задача 4.3. Исследуем классические решения уравнения

Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и задачу Коши для него

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (8)$$

Решение. 1) Происхождение уравнения Хопфа. Переменные Лагранжа: $x = ut + \xi$, где ξ — начальная координата точки сплошной среды, u — проекция на ось Ox



скорости точки сплошной среды, x — координата точки в момент времени t , $u = u(x, t)$ — скорость точки сплошной среды, которая в момент времени t имеет координату x .

Поскольку в этой модели на точки сплошной среды силы не действуют, $\frac{du}{dt} = 0$ (полная производная скорости равна нулю)

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} u \text{ — уравнение Хопфа.}$$

2) Система характеристик для уравнения Хопфа имеет вид

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = u, \\ \dot{u} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}.$$

Общее решение системы характеристик: $t = p + t_0$,

$x = u_0 p + x_0$, $u = u_0$, где $t_0 = t(0)$, $x_0 = x(0)$, $u_0 = u(0)$.

Интегралы системы характеристик: $u = C_1 \Rightarrow dx - C_1 dt = 0$
 $\Rightarrow d(x - C_1 t) = 0 \Rightarrow x - C_1 t = C_2 \Rightarrow x - ut = C_2. I = u,$

$J = x - ut$ — два независимых интеграла системы характеристик. Действительно, ранг матрицы Якоби

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_x & I_t & I_u \\ J_x & J_t & J_u \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -u & -t \end{pmatrix} = 2.$$

- 3) Найдём общее решение уравнения Хопфа в параметрическом виде. Пусть (t_0, x_0) — произвольная точка на начальной кривой $\gamma = \{t = 0\}$, т.е. $t_0 = 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $u_0 = v(x_0) \Rightarrow (0, x_0, v(x_0)) \in \Gamma$, где Γ — график начальной функции. Параметризация интегральной поверхности:

$$\begin{cases} x = u_0(x^0)p + x_0, \\ t = p, \\ u = u_0(x^0). \end{cases} \quad (9)$$

Если $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, то формула (9) даёт общее решение уравнения Хопфа в параметрическом виде.

Общее решение уравнения Хопфа в неявном виде:

$V(u, x - ut) = 0$, где $V \in C^1$, $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ в окрестности точки

начальной кривой $\gamma \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial I} - t \frac{\partial V}{\partial J} \neq 0$ в

окрестности точки начальной кривой $\gamma \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial I} \neq 0$ в точке (в

окрестности точки) начальной кривой γ . Примеры: $V(I, J) = I \Rightarrow u = 0$ — тривиальное решение уравнения Хопфа;

$V(I, J) = J \Rightarrow x - ut = 0$, т.е. $u = \frac{x}{t}$ — частное решение

уравнения Хопфа при $t > 0$, оно не может быть решением задачи Коши (8).

- 4) Формулы (9) дают параметрическое решение задачи Коши. Также решение задачи Коши можно получить из неявного

общего решения $V(u, x - ut) = 0$. Подстановка начального условия в неявное общее решение даёт: $V(u_0(x), x) = 0$.

Найдём частное нетривиальное решение этого уравнения,

удовлетворяющее условию $\frac{\partial V}{\partial I} \neq 0$. Оно имеет вид

$V(I, J) = I - u_0(J)$. Имеем $\frac{\partial V}{\partial I} = 1 \neq 0$. Таким образом,

решение задачи Коши в неявном виде представляет собой $u = u_0(x - ut)$.

5) Исследуем глобальную разрешимость задачи Коши для уравнения Хопфа.

- Пусть u_0 — неубывающая функция на прямой, т.е. $u'_0(x) \geq 0$ при любом x . Тогда решение задачи (8) существует при любом $t > 0$. Действительно, рассмотрим отображение проектирования $S \ni (x, t, u) \mapsto (x, t) \in \mathbb{R}^2$ и связанное с ним отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (x_0, p) \mapsto (x, t) \in \mathbb{R}^2$, запишем матрицу Якоби второго отображения

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial t}{\partial x_0} & \frac{\partial t}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_0(x_0)p + 1 & u_0(x_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан $u'_0(x_0)p + 1 \geq 1$ для всех $p \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, отображение проектирования не имеет особенностей при $t \geq 0$, и часть интегральной поверхности, соответствующая $t \geq 0$, однозначно проектируется на плоскость независимых переменных, классическое решение задачи (8) существует при любых $t > 0$.

Пример: рассмотрим начальную функцию

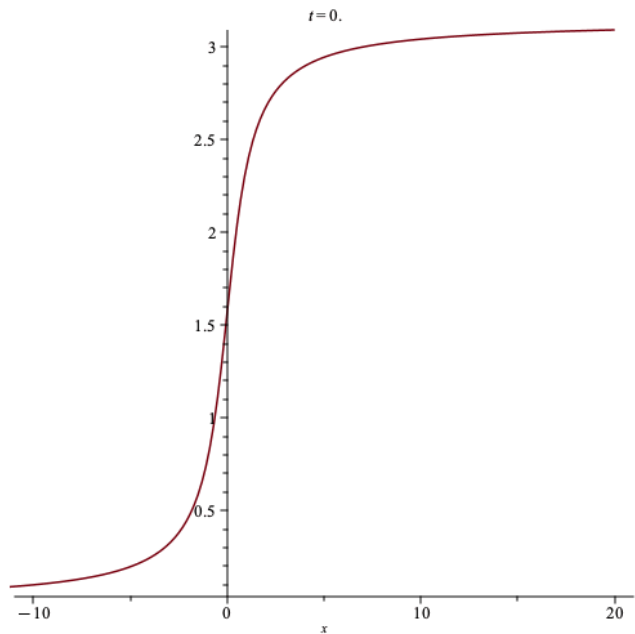
$u_0(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$. Решение задачи Коши представляется

неявной формулой $u = \arctan(x - ut) + \frac{\pi}{2}$, очевидно, что эта функция ограничена. Продифференцируем по x :

$$u_x = \frac{1}{1+t+(x-ut)^2} > 0,$$

кроме того, $u_x < \frac{1}{1+t}$.

Построим анимацию решения в MAPLE.



- Пусть $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ (непрерывно дифференцируемая и ограниченная функция), но существует открытое множество на прямой, в котором $u'_0 < 0$. Предположим, что оно связное: для $x \in (a, b)$ $u'_0(x) < 0$; если $x \notin (a, b)$, то $u'_0(x) \geq 0$. Тогда решение задачи Коши существует в области $\Pi_{T^*} = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T^* < \infty\}$ и в некоторой точке x^* производная решения $u_x(x^*, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^* - 0$. Такая ситуация называется градиентной катастрофой, а T^*, x^* — временем и точкой градиентной катастрофы. Вернёмся к якобиану отображения, ассоциированного с проектированием: $u'_0(x^0)p + 1 > 0$ для всех $p = t \in [0, T^*)$ и $x_0 \in (-\infty, +\infty; u'_0(\hat{x})T^* + 1 = 0$, где $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x_0 \in (a,b)} |u'_0(x_0)|$. Отсюда $T^* = -\frac{1}{u'_0(\hat{x})}$,

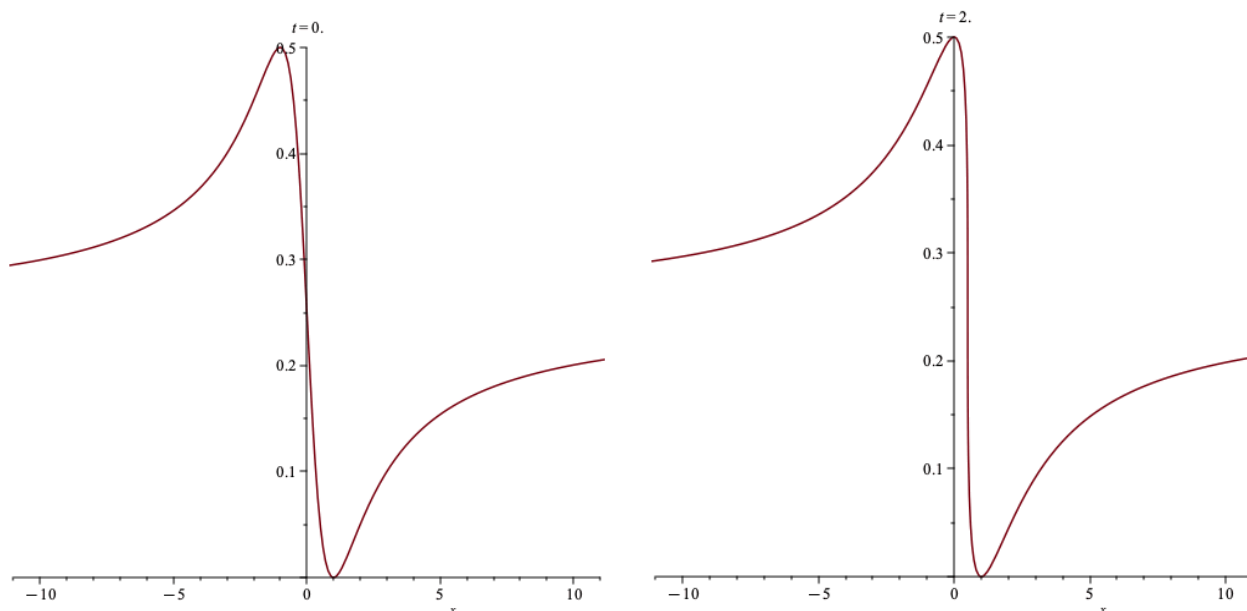
$$x^* = u_0(\hat{x})T^* + \hat{x}.$$

Пример: рассмотрим начальную функцию

$$u_0(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}. \text{ Имеем } u'_0(x) = \frac{x^2 - 1}{2(1+x^2)^2} < 0 \text{ тогда}$$

и только тогда, когда $|x| < 1$. Максимум модуля производной на $(-1, 1)$ равен и он достигается в точке $\hat{x} = 0$, отсюда время

градиентной катастрофы $T^* = \frac{1}{|u'_0(\hat{x})|} = 2$, а точка $x^* = u_0(\hat{x}) T^* + \hat{x} = \frac{1}{4} \cdot 2 + 0 = \frac{1}{2}$. Построим анимацию решения в MAPLE при $0 < t < T^*$



и при $t > T^*$, когда решение становится многозначным.

Замечание: классическое решение при $t > T^*$ не существует, но существует обобщённое решение, речь о котором пойдёт далее.

Задача 4.4. <разбор примера решения инд. задания #4>

Задача 4.5. Исследуем обобщённые решения уравнения

Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и обобщённые решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (8)$$

Вспомним теорию дивергентного квазилинейного уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0 \Rightarrow u_t = - (f(u))_x \quad (10)$$

(для уравнения Хопфа $f(u) = u^2/2$).

Определение. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ называется *обобщённым решением* уравнения (10) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если: 1) $f(u) \in L_{1,loc}(\Omega)$; 2) для любой пробной функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Omega} (uv_t + f(u)v_x) dxdt = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим задачу Коши для дивергентного квазилинейного уравнения

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, (x, t) \in \Pi_T, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\Pi_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ — полоса,

$u_0 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ — начальная функция. Введём обозначение

$$\tilde{\Pi}_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 \leq t < T\} —$$

полузамыкание полосы Π_T .

Определение. Функция $u \in L_{1,loc}(\tilde{\Pi}_T)$ называется *обобщённым решением* задачи Коши (12) в полосе Π_T , если: 1) $f(u) \in L_{1,loc}(\tilde{\Pi}_T)$; 2) для любой пробной функции $v \in C_0^\infty(\tilde{\Pi}_T)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Pi_T} (uv_t + f(u)v_x) dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v|_{t=0} dx = 0. \quad (13)$$

Вернёмся к уравнению (10). Допустим, что область Ω разделена на две части Ω_+ и Ω_- гладкой кривой $\gamma \subset \Omega$:

$\Omega = \Omega_- \sqcup \gamma \sqcup \Omega_+$. Пусть $\vec{\nu}$ — ориентирующее γ поле

единичных нормалей. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$

имеет класс $\tilde{C}^1$ с разрывом γ , если $u|_{\Omega_+} \in C^1(\Omega_+ \cup \gamma)$,

$u|_{\Omega_-} \in C^1(\Omega_- \cup \gamma)$. В любой точке $(x_0, t_0)^T \in \gamma$ существуют

$$u_-(x_0, t_0) = \lim_{\Omega_- \ni (x,t)^T \rightarrow (x_0,t_0)^T} u(x, t), \quad u_+(x_0, t_0) = \lim_{\Omega_+ \ni (x,t)^T \rightarrow (x_0,t_0)^T} u(x, t).$$

Определение. Ударной волной называется обобщённое решение уравнения (10) класса $\tilde{C}^1$.

Теорема. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ класса $\tilde{C}^1$ с разрывом γ — ударная волна (т.е. обобщённое решение уравнения (10))

$\Leftrightarrow$ она есть классическое решение уравнения (10) в $\Omega_- \sqcup \gamma$ и $\Omega_+ \sqcup \gamma$, удовлетворяющее на линии разрыва γ условию Ранкина—Гюгонио: в любой точке $(x_0, t_0)^T \in \gamma$

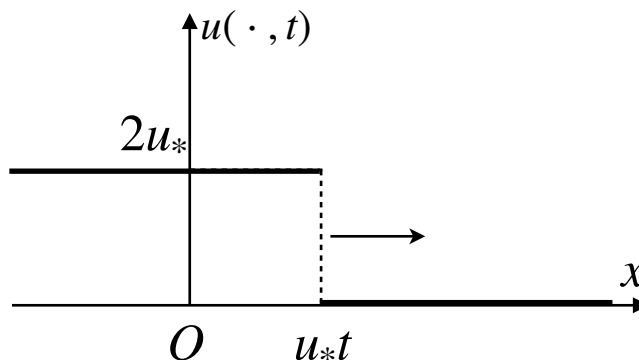
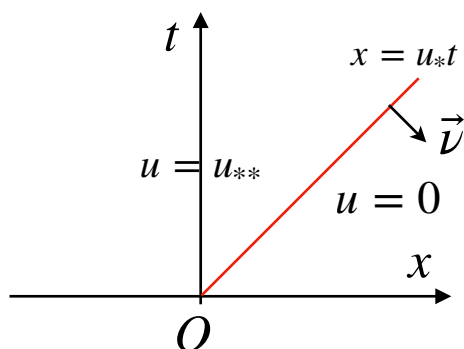
$$(u_+ - u_-) \nu_t + (f(u_+) - f(u_-)) \nu_x = 0. \quad (14)$$

Построим простейшее обобщённое решение уравнения Хопфа, которое **не обращается** в классическое после возможного изменения на множестве меры нуль. Пусть $\Omega = \Pi_\infty = \{-\infty < x < \infty, t > 0\}$, $\gamma = \{x - u_* t = 0, t > 0\}$ — линия (луч) разрыва. Здесь u_* — скорость ударной волны. Тогда функция

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > u_* t \\ u_{**}, & x < u_* t \end{cases}$$

есть обобщённое решение уравнения Хопфа. Действительно, проверим условие Ранкина—Гюгонио: $\vec{\nu} = \vec{e}_x - u_* \vec{e}_t$, $u_+ = 0$,

$$u_- = u_{**} \Rightarrow -u_{**}(-u_*) - \frac{1}{2}u_{**}^2 = 0 \Rightarrow u_{**} = 2u_*.$$



В предыдущей задаче мы построили классическое решение уравнения Хопфа, существующее в Π_{T^*} , но при $t = T^*$ в точке $x = x^*$ терпящее градиентную катастрофу. При $t > T^*$ имеем ударную волну с линией разрыва $x = \gamma(t)$, $x^* = \gamma(T^*)$, а решение имеет вид, показанный на рисунке. Выясним, что это за разрыв.

Рассмотрим интеграл $S(t) = \int_a^b u(x, t) dx$, $-\infty \leftarrow a < b \rightarrow \infty$.

Запишем $S(t) = \int_a^{\gamma(t)} u(x, t) dx + \int_{\gamma(t)}^b u(x, t) dx$, вычислим

производную:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= u_-(x, t) \dot{\gamma}(t) + \int_a^{\gamma(t)} u_t(x, t) dx - u_+(x, t) \dot{\gamma}(t) + \int_{\gamma(t)}^b u_t(x, t) dx = \\ &= (u_-(x, t) - u_+(x, t)) \dot{\gamma}(t) - \int_a^{\gamma(t)} (f(u(x, t)))_x dx - \int_{\gamma(t)}^b (f(u(x, t)))_x dx = \\ &= - (u_+(x, t) - u_-(x, t)) \dot{\gamma}(t) + f(u_+(x, t)) - f(u_-(x, t)) + f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \end{aligned}$$

Предположим, что $u(a, t), u(b, t) \rightarrow u_\infty$ при $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\frac{dS}{dt} \approx f(u_+(x, t)) - f(u_-(x, t)) - (u_+(x, t) - u_-(x, t)) \dot{\gamma}(t) = 0$$

по условию Ранкина-

Гюгонио. Таким образом,

площадь под графиком

$u = u(x, t)$, $a < x < b$,

$a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$, должна

сохраняться. Следовательно,

разрыв будет в такой точке

$x = \gamma(t)$, что площади S_1 и S_2

равны.

