

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть $\Omega = (0, L) \times (0, L)$ — квадрат. Рассматривается уравнение $\mathcal{L}u = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, где $\mathcal{L}$ — дивергентный равномерно эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор второго порядка. На границе $\partial\Omega$ рассматривается комбинация условий Дирихле / Неймана / Робена. Предлагается найти приближённое решение краевой задачи вариационным методом. Для этого:

- 1) определить энергетическое пространство H как некоторое замкнутое подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и ввести функционал энергии $E = E(u)$, $u \in H$;
- 2) варьируя функционал энергии $E = E(u)$, убедиться в том, что $\mathcal{L}u = f(x, y)$ — действительно его уравнение Эйлера-Лагранжа, краевые условия для которого есть заданные краевые условия;
- 3) в энергетическом пространстве H выбрать тригонометрический или полиномиальный базис в зависимости от вычислительных преимуществ;
- 4) получить общую схему Ритца построения минимизирующей последовательности для экстремали $\operatorname{argmin}_{u \in H} E(u)$;
- 5) для указанных правых частей в одной из компьютерных математических сред найти приближение Ритца $U_{4,4}(x, y)$ для первых $4 \times 4 = 16$ базисных функций;
- 6) в той же математической среде визуализировать приближение Ритца, т.е. построить двумерную поверхность — график $U_{4,4}(x, y)$.

Ресурсы для решения задания #2

1. [Материалы](#) практической темы «Вариационные проблемы уравнений в частных производных».
2. [Пример](#) решения задания #2.
3. В.И. Безяев, Р.Я. Глаголева и др. Методические указания к курсовым работам по уравнениям математической физики. М.: Изд-ва МАИ, 2000.
4. Комеч А.И. Практические решения уравнений математической физики. Механико-математический факультет МГУ, 1993. http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf

Номер варианта студента / студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 32**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Дедлайн для всех групп — **19.04.25, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1. $\begin{cases} (1+x+y)(u_{xx}+u_{yy})+u_x+u_y=-f(x,y), \\ -u_x _{x=0}=0, u_x _{x=L}=0, \\ u _{y=0}=\varphi(x), u _{y=L}=0. \end{cases}$ $f(x,y)=2, \varphi(x)=1, L=1.$	Вариант 2 $\begin{cases} (1+\cos^2 x)(u_{xx}+u_{yy})-u_x \sin 2x=-f(x,y), \\ u _{x=0}=\varphi(y), u_x+u _{x=L}=0, \\ u _{y=0}=0, u _{y=L}=0. \end{cases}$ $f(x,y)=-\sin 2x, \varphi(y)=\sin \frac{\pi y}{L}, L=\pi.$
Вариант 3. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+y)u=f(x,y), \\ u _{x=0}=0, u_x _{x=L}=0, \\ u _{y=0}=0, u_y _{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$ $f(x,y)=y^2-1, \varphi(x)=x^2-2Lx, L=1.$	Вариант 4. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(x+y)u=f(x,y), \\ -u_x+u _{x=0}=0, u _{x=L}=0, \\ -u_y _{y=0}=\varphi(x), u_y _{y=L}=0. \end{cases}$ $f(x,y)=x+y,$ $\varphi(x)=\left(-\frac{1}{L}-\frac{1}{L^2}\right)x^2+x+1, L=1.$
Вариант 5. $\begin{cases} (1+y)(u_{xx}+u_{yy})+u_y=-f(x,y), \\ u _{x=0}=0, u _{x=L}=0, \\ -u_y+u _{y=0}=0, u_y+u _{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$ $f(x,y)=1, \varphi(x)=-x^2+Lx, L=1.$	Вариант 6. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+u \cos^2 x=f(x,y), \\ u _{x=0}=0, u _{x=L}=0, \\ -u_y+u _{y=0}=\varphi(x), u_y _{y=L}=0. \end{cases}$ $f(x,y)=-\cos^2 x, \varphi(x)=\sin \frac{\pi x}{L}, L=\pi.$
Вариант 7. $\begin{cases} (1+x)(u_{xx}+u_{yy})+u_x=-f(x,y), \\ u _{x=0}=0, u_x _{x=L}=\varphi(y), \\ -u_y _{y=0}=0, u _{y=L}=0. \end{cases}$ $f(x,y)=1, \varphi(y)=L^2-y^2, L=1.$	Вариант 8. $\begin{cases} (1+\cos^2 y)(u_{xx}+u_{yy})-u_y \sin 2y=-f(x,y), \\ u _{x=0}=0, u _{x=L}=0, \\ -u_y _{y=0}=\varphi(x), u_y _{y=L}=0. \end{cases}$ $f(x,y)=1, \varphi(x)=\sin \frac{\pi x}{L}, L=\pi.$

Вариант 9. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1+x)u = f(x, y), \\ u _{x=0} = 0, u_x + u _{x=L} = \varphi(y), \\ u _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1 - x^2, \varphi(y) = \sin \frac{\pi y}{2L}, L = \pi.$	Вариант 10. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + u = f(x, y), \\ -u_x + u _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ -u_y + 2u _{y=0} = \varphi(x), u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = x + y, \varphi(x) = -\frac{1}{2L}x^2 + x + 1, L = 1.$
Вариант 11. $\begin{cases} (1+x^2)(u_{xx} + u_{yy}) + 2xu_x = -f(x, y), \\ -u_x + u _{x=0} = \varphi(y), u _{x=L} = 0, \\ -u_y _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 2x, \varphi(y) = 1, L = 1.$	Вариант 12. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + u \sin^2 x = f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u_y + u _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x, y) = -\sin^2 x, \varphi(x) = \cos \frac{\pi x}{L}, L = \pi.$
Вариант 13. $\begin{cases} (2 + \sin y)(u_{xx} + u_{yy}) + u_y \cos y = -f(x, y), \\ -u_x + u _{x=0} = 0, u_x + 2u _{x=L} = \varphi(y), \\ -u_y _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = \cos y, \varphi(y) = \cos \frac{\pi y}{L}, L = \pi.$	Вариант 14. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1+x+y)u = f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = \varphi(x), u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1 + x + y, \varphi(x) = -\frac{2}{L}x^3 + 3x^2, L = 1.$
Вариант 15. $\begin{cases} (1 + \cos^2 y)(u_{xx} + u_{yy}) - u_y \sin 2y = -f(x, y), \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x, y) = \sin 4y, \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}, L = \pi.$	Вариант 16. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1+xy)u = f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = \varphi(y), u _{x=L} = 0, \\ -u_y + u _{y=0} = 0, u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1 - x^2y^2, \varphi(y) = \left(-\frac{1}{L} - \frac{1}{L^2}\right)y^2 + y + 1, L = 1.$

Вариант 17. $\begin{cases} (1 + xy)(u_{xx} + u_{yy}) + xu_x + yu_y = -f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u _{x=L} = 0, \\ -u_y + u _{y=0} = \varphi(x), u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1, \varphi(x) = L^2 - x^2, L = 1.$	Вариант 18. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (\cos^2 x + \cos^2 y)u = f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u_y + u _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x, y) = -\cos^2 x - \cos^2 y,$ $\varphi(x) = \cos \frac{\pi x}{L}, L = \pi.$
Вариант 19. $\begin{cases} (1 + x^2 + y^2)(u_{xx} + u_{yy}) + u_x + 2yu_y = -f(x, y), \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = \varphi(y), \\ -u_y _{y=0} = 0, u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1 + 2y, \varphi(y) = L^2 - y^2, L = 1.$	Вариант 20. $\begin{cases} (2 + \cos y)(u_{xx} + u_{yy}) - u_y \sin y = -f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = \varphi(x), u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = -\sin y, \varphi(x) = 1, L = \pi.$
Вариант 21. $\begin{cases} (1 + x + y)(u_{xx} + u_{yy}) + u_x + u_y = -f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x, y) = 2, \varphi(x) = 1, L = 1.$	Вариант 22. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1 + x)u = f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = \varphi(y), u_x _{x=L} = 0, \\ -u_y _{y=0} = 0, u_y + u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1 - x^2, \varphi(y) = y^2 - L^2 - 2L,$ $L = 1.$
Вариант 23. $\begin{cases} (1 + \sin^2 x)(u_{xx} + u_{yy}) + u_x \sin 2x = -f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u_y + u _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x, y) = \sin 2x, \varphi(x) = \cos \frac{\pi x}{2L}, L = \pi.$	Вариант 24. $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1 + y)u = f(x, y), \\ -u_x _{x=0} = \varphi(y), u_x + u _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x, y) = 1 - y^2, \varphi(y) = -y^3 + Ly^2,$ $L = 1.$

Вариант 25. $\begin{cases} (1+x^2)(u_{xx}+u_{yy})+2xu_x = -f(x,y), \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = \varphi(y), \\ -u_y+u _{y=0} = 0, u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x,y) = 1+3x^2,$ $\varphi(y) = \left(-\frac{1}{L}-\frac{1}{L^2}\right)y^2+y+1, L=1.$	Вариант 26. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+\cos y)u = f(x,y), \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u_y+u _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x,y) = -1-\cos y, \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{L},$ $L = \pi.$
Вариант 27. $\begin{cases} (1+\sin^2 y)(u_{xx}+u_{yy})+u_y \sin 2y = -f(x,y), \\ u _{x=0} = 0, u_x+u _{x=L} = \varphi(y), \\ -u_y _{y=0} = 0, u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x,y) = \sin 2x, \varphi(y) = \cos \frac{\pi y}{2L}, L = \pi.$	Вариант 28. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+x)u = f(x,y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ u _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x,y) = 1+xy, \varphi(x) = 1, L = 1.$
Вариант 29. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(x^2+y)u = f(x,y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u _{x=L} = 0, \\ -u_y+u _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$ $f(x,y) = x^2+y^2, \varphi(x) = L^2-x^2, L = 1.$	Вариант 30. $\begin{cases} (1+x)(u_{xx}+u_{yy})+u_x = -f(x,y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u _{x=L} = \varphi(y), \\ -u_y+u _{y=0} = 0, u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x,y) = 1, \varphi(y) = -\frac{1}{2L}y^2+y+1,$ $L = 1.$
Вариант 31. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+\cos x)u = f(x,y), \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = 0, \\ -u_y _{y=0} = \varphi(x), u_y _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x,y) = -1-\cos x, \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2L},$ $L = \pi.$	Вариант 32. $\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+xy)u = f(x,y), \\ -u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=L} = \varphi(y), \\ u _{y=0} = 0, u _{y=L} = 0. \end{cases}$ $f(x,y) = 1-x^2y^2, \varphi(y) = -y^2+Ly,$ $L = 1.$