

ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

Тема 2 «Вариационный метод решения краевых задач»

Пусть $\Omega = (0, L) \times (0, L)$ — квадрат. Рассматривается уравнение $\mathcal{L}u = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, где $\mathcal{L}$ — дивергентный равномерно эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор второго порядка. На границе $\partial\Omega$ рассматривается комбинация условий Дирихле / Неймана / Робена. Предлагается найти приближённое решение краевой задачи вариационным методом. Для этого:

- 1) определить энергетическое пространство H как некоторое замкнутое подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и ввести функционал энергии $E = E(u)$, $u \in H$;
- 2) варьируя функционал энергии $E = E(u)$, убедиться в том, что $\mathcal{L}u = f(x, y)$ — действительно его уравнение Эйлера-Лагранжа, краевые условия для которого есть заданные краевые условия;
- 3) в энергетическом пространстве H выбрать тригонометрический или полиномиальный базис в зависимости от вычислительных преимуществ;
- 4) получить общую схему Ритца построения минимизирующей последовательности для экстремали $\arg\min_{u \in H} E(u)$;
- 5) для указанных правых частей в одной из компьютерных математических сред найти приближение Ритца $U_{4,4}(x, y)$ для первых $4 \times 4 = 16$ базисных функций;
- 6) в той же математической среде визуализировать приближение Ритца, т.е. построить двумерную поверхность — график $U_{4,4}(x, y)$.

Пример. $f(x, y) = 1$, $\varphi(x) = x$, $L = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + x^2 y)(u_{xx} + u_{yy}) + x^2 u_y + 2xy u_x = -f(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u_x|_{x=L} = 0, \\ -u_y + u|_{y=0} = 0 \Leftrightarrow u_y|_{y=0} = u|_{y=0}, \\ u_y|_{y=L} = \varphi(x). \end{array} \right. \quad (1)$$

Преобразуем уравнение:

$$-(1 + x^2 y)(u_{xx} + u_{yy}) - x^2 u_y - 2xy u_x = f(x, y) \Leftrightarrow$$

$$-u_{xx} - u_{yy} - x^2 y u_{xx} -$$

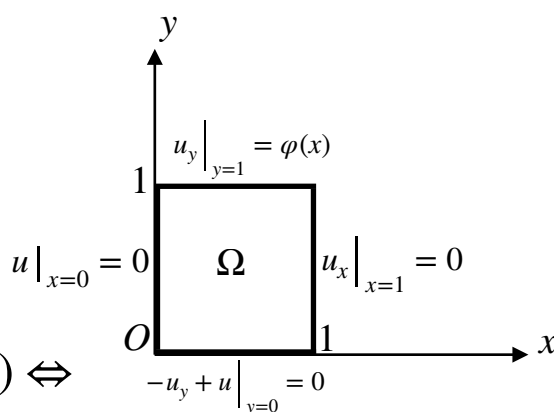
$$-2xy u_x - x^2 y u_{yy} - x^2 u_y = f(x, y) \Leftrightarrow$$

$$-\operatorname{div}((1 + x^2 y) \nabla u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}((1 + x^2 y) u_x) - \frac{\partial}{\partial y}((1 + x^2 y) u_y) = f(x, y).$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial}{\partial x}((1 + x^2 y) u_x) - \frac{\partial}{\partial y}((1 + x^2 y) u_y) —$$

дивергентный равномерно эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор второго порядка.



1) Определим энергетическое пространство H — замкнутое подпространство в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, введём в рассмотрение на нём функционал энергии $E = E(u)$, $u \in H$.

Как выбрать энергетическое пространство? Ответ:

$H = \{u \in H^1(\Omega) : \text{условия Дирихле}\}$. В нашем случае

$$H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{x=0} = 0 \right\}.$$

Чтобы получить функционал энергии, необходимо прежде всего записать определение обобщённого решения краевой задачи. Для этого предположим, что $u \in H^2(\Omega)$ — её сильное решение. Пусть $v \in H^1(\Omega)$ — пробная функция. Умножим уравнение на пробную функцию и проинтегрируем по Ω :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \mathcal{L}u dx dy &= \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy. \text{ Применим формулу} \\ \text{интегрирования по частям для интеграла в левой части этого} \\ \text{равенства: } \iint_{\Omega} v \mathcal{L}u dx dy &= - \iint_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + x^2 y) u_x \right) dx dy - \\ &- \iint_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + x^2 y) u_y \right) dx dy = \iint_{\Omega} (1 + x^2 y) (u_x v_x + u_y v_y) dx dy - \\ &- \int_{\partial\Omega} (1 + x^2 y) u_x v \Big|_{\partial\Omega} \nu_x ds - \int_{\partial\Omega} (1 + x^2 y) u_y v \Big|_{\partial\Omega} \nu_y ds = \\ &= \iint_{\Omega} (1 + x^2 y) (u_x v_x + u_y v_y) dx dy - \int_0^1 (1 + x^2 y) u_x v \Big|_{x=0} (-1) dy - \\ &- \int_0^1 (1 + x^2 y) u_x v \Big|_{x=1} dy - \int_0^1 (1 + x^2 y) u_y v \Big|_{y=0} (-1) dx - \int_0^1 (1 + x^2 y) u_y v \Big|_{y=1} 1 dx = \\ &= \iint_{\Omega} (1 + x^2 y) (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + \int_0^1 u_x \Big|_{x=0} v \Big|_{x=0} dy - \int_0^1 (1 + y) u_x \Big|_{x=1} v \Big|_{x=1} dy + \\ &+ \int_0^1 u_y \Big|_{y=0} v \Big|_{y=0} dx - \int_0^1 (1 + x^2) u_y \Big|_{y=1} v \Big|_{y=1} dx = \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Omega} (1 + x^2 y)(u_x v_x + u_y v_y) dx dy + \int_0^1 u_x \big|_{x=0} v \big|_{x=0} dy +$$

$$+ \int_0^1 u \big|_{y=0} v \big|_{y=0} dx - \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) v \big|_{y=1} dx. \text{ Потребуем ещё,}$$

чтобы $v \in H$, т.е. $v \big|_{x=0} = 0$. Тогда формула интегрирования по частям даёт интегральное равенство

$$\iint_{\Omega} (1 + x^2 y)(u_x v_x + u_y v_y) dx dy + \int_0^1 u \big|_{y=0} v \big|_{y=0} dx -$$

$$- \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) v \big|_{y=1} dx = \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy \text{ или}$$

$$\iint_{\Omega} (1 + x^2 y)(u_x v_x + u_y v_y) dx dy + \int_0^1 u \big|_{y=0} v \big|_{y=0} dx -$$

$$- \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) v \big|_{y=1} dx - \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy = 0. \quad (2)$$

Определение. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи (1), если

- $u \big|_{x=0} = 0$, т.е. $u \in H$;
- для любой функции $v \in H$ выполнено интегральное равенство (2).

Нетрудно видеть, что равенство (2) можно переписать в виде

$$\forall v \in H \quad (u, v)' - \langle l, v \rangle = 0, \quad (3)$$

где $(u, v)' = \iint_{\Omega} (1 + x^2 y)(u_x v_x + v_x v_y) dx dy + \int_0^1 u \big|_{y=0} v \big|_{y=0} dx$

— билинейная симметрическая форма,

$$\langle l, v \rangle = \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) v|_{y=1} dx + \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy —$$

линейный функционал. В следующем пункте мы покажем, что соотношение (3) есть необходимое условие экстремали функционала энергии $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle$. Итак,

$$\begin{aligned} E(u) = & \iint_{\Omega} (1 + x^2 y) |\nabla u|^2 dx dy + \int_0^1 u^2 \Big|_{y=0} dx - \\ & - 2 \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) u|_{y=1} dx - 2 \iint_{\Omega} f(x, y) u dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

2) Варьируя функционал энергии $E = E(u)$, убедимся в том, что $\mathcal{L}u = f(x, y)$ — его уравнение Эйлера-Лагранжа, а краевые условия для этого функционала есть заданные краевые условия.

Пусть $u^* \in H$ — экстремаль функционала энергии $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle$, минимизирующая его. Рассмотрим $\delta u = v \in H, t \in \mathbb{R}$ и приращении функционала $E(u^* + tv) - E(u^*)$. Пользуясь билинейностью и симметричностью формы $(\cdot, \cdot)'$, а также линейностью функционала $\langle l, \cdot \rangle$, имеем следующее выражение для приращения:

$$\begin{aligned} E(u^* + tv) - E(u^*) &= (u^* + tv, u^* + tv)' - 2\langle l, u^* + tv \rangle - (u^*, u^*)' - 2\langle l, u^* \rangle = \\ &= t^2 (v, v)' + 2t (u^*, v) + (u^*, u^*) - 2\langle l, u^* \rangle - 2t \langle l, v \rangle - \\ &- (u^*, u^*)' - \langle l, u^* \rangle = t^2 (v, v)' + 2t \left((u^*, v)' - \langle l, v \rangle \right). \end{aligned}$$

Поскольку u^* минимизирует функционал энергии, приращение должно быть ≥ 0 . Отсюда, учитывая $(v, v)' > 0$ при $v \neq 0$ (см. далее), $(u^*, v)' - \langle l, v \rangle = 0$ для любой $v \in H$, что идентично соотношению (3).

Чтобы теперь получить из (3) (или (2)) краевую задачу (1), необходимо дополнительно сделать предположение о том, что экстремаль $u \in H^2(\Omega)$. Тогда можно применить формулу интегрирования по частям к первому интегралу в левой части равенства (2):

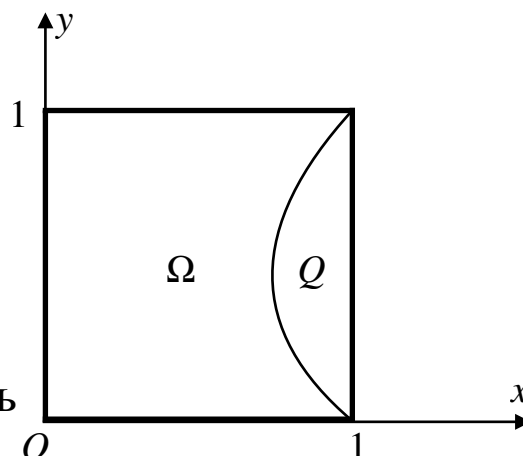
$$\begin{aligned}
 & - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + x^2 y) u_x \right) v dx dy - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + x^2 y) u_y \right) v dx dy + \\
 & + \int_0^1 (1 + x^2 y) u_x v \Big|_{x=0} (-1) dy + \int_0^1 (1 + x^2 y) u_x v \Big|_{x=1} dy + \\
 & + \int_0^1 (1 + x^2 y) u_y v \Big|_{y=0} (-1) dx + \int_0^1 (1 + x^2 y) u_y v \Big|_{y=1} 1 dx + \\
 & + \int_0^1 u \Big|_{y=0} v \Big|_{y=0} dx - \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) v \Big|_{y=1} dx - \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy = 0 \\
 \Leftrightarrow 0 & = \iint_{\Omega} (\mathcal{L}u - f(x, y)) v dx dy + \int_0^1 (1 + y) u_x \Big|_{x=1} v \Big|_{x=1} dy + \\
 & + \int_0^1 \left(-u_y + u \Big|_{y=0} \right) v \Big|_{y=0} (-1) dx + \int_0^1 (1 + x^2) \left(u_y \Big|_{y=1} - \varphi(x) \right) v \Big|_{y=1} dx.
 \end{aligned}$$

• Имеем для $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\iint_{\Omega} (\mathcal{L}u - f(x, y)) v dx dy = 0$, по лемме Дюбуа-Реймона $\mathcal{L}u = f(x, y)$ — уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала энергии (4).

- Краевое условие $u \Big|_{x=0} = 0$, потому что экстремаль $u \in H$.
- Пусть $\psi \in \mathcal{D}(0, 1)$. Рассмотрим поднятие Ψ этой функции в квадрат Ω , носитель которого находится в подобласти Q , показанной на рисунке.

Тогда последнее интегральное равенство упроститься до

$$\iint_Q (\mathcal{L}u - f(x, y)) \Psi dx dy + \int_0^1 (1 + y) \psi(y) u_x \Big|_{x=1} dy = 0.$$



Меру области Q можно устремить к нулю так, чтобы L_2 -норма Ψ также стремилась к нулю. Но тогда предельный переход $\text{mes } Q \rightarrow 0$ в последнем равенстве даёт

$$\int_0^1 (1 + y) \psi(y) u_x \Big|_{x=1} dy = 0 \Rightarrow (\text{по лемме Дюбуа-Реймона}) u_x \Big|_{x=1} = 0. \text{ Аналогично можно получить оставшиеся краевые условия } -u_y + u \Big|_{y=0} = 0 \text{ и } u_y \Big|_{y=1} = \varphi(x).$$

Таким образом, задача (1) есть необходимое условие экстремали функционала энергии (4) в энергетическом пространстве $H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u \Big|_{x=0} = 0 \right\}$.

Остановимся на существовании и единственности экстремали. Вспомним, что функционал энергии имеет вид $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle$, где

$$(u, v)' = \iint_{\Omega} (1 + x^2 y) (u_x v_x + v_x v_y) dx dy + \int_0^1 u \Big|_{y=0} v \Big|_{y=0} dx —$$

билинейная и симметрическая форма в H , а

$$\langle l, u \rangle = \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) u \Big|_{y=1} dx + \iint_{\Omega} f(x, y) u dx dy —$$

линейный функционал. Из теоремы об эквивалентной норме следует, что форма $(\cdot, \cdot)'$ задаёт скалярное произведение, порождающее норму, эквивалентную стандартной (обозначим её через $\|\cdot\|'$). Легко показать, что линейный функционал $\langle l, \cdot \rangle$ ограничен в H ; пусть $\|l\|$ — его норма, ассоциированная с эквивалентной нормой в H .

Покажем, что функционал энергии ограничен снизу:

$$|\langle l, u \rangle| \leq \|l\| \|u\|' \Leftrightarrow -\|l\| \|u\|' \leq \langle l, u \rangle \leq \|l\| \|u\|'. \text{ Имеем } \\ E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle \geq \|u\|^2 - 2\|l\| \cdot \|u\|' + \|l\|^2 - \|l\|^2 = \\ = (\|u\|' - \|l\|)^2 - \|l\|^2 \geq -\|l\|^2. \text{ Следовательно, } \\ \exists m = \inf_{u \in H} E(u) > -\infty.$$

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ — такая последовательность функций из энергетического пространства, что $E(u_k) \rightarrow m$ при $k \rightarrow \infty$ (минимизирующая последовательность). Воспользуемся тождеством параллелограмма:

$$\left\| \frac{u_j - u_k}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \|u_k\|^2 - \left\| \frac{u_j + u_k}{2} \right\|^2 + 2 \left\langle l, \frac{u_j + u_k}{2} \right\rangle - \\ - \langle l, u_j \rangle - \langle l, u_k \rangle = \frac{1}{2} E(u_j) + \frac{1}{2} E(u_k) - E\left(\frac{u_j + u_k}{2}\right).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $N \in \mathbb{N}$, что $\forall j, k \in \mathbb{N}$, $j, k \geq N$, $E(u_j) < m + \varepsilon$, $E(u_k) < m + \varepsilon$. Т.к. $E\left(\frac{u_j + u_k}{2}\right) \geq m$,

$$\left\| \frac{u_j - u_k}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} E(u_j) + \frac{1}{2} E(u_k) - E\left(\frac{u_j + u_k}{2}\right) \leq m + \varepsilon - m = \varepsilon.$$

Итак, $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность. Из полноты пространства H следует, что $\exists u^* = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$, а из

непрерывности функционала энергии $\Rightarrow u^*$ есть экстремаль.

Докажем, что экстремаль $u^* \in H$ единственна. Пусть $u^* \in H$ — другая экстремаль, $u^* \neq u^*$. Составим последовательность $\{u^*, u^*, u^*, u^*, \dots\}$. С одной стороны, данная

последовательностью минимизирует функционал энергии,

поэтому должна быть фундаментальной. С другой стороны, она не может быть фундаментальной, потому что $\|u^* - u^\star\|' \neq 0$. Противоречие указывает на единственность экстремали.

3) Сделаем выбор базиса в энергетическом пространстве H .

Как выбрать базис в энергетическом пространстве? Начнём с пространств функций одной переменной.

- Система полиномов $\{x^j(L-x)^k\}_{j,k=1}^\infty$ тотальна в

пространстве $H_0^1(0,L)$. В самом деле, пространство

многочленов, которые равны нулю в точках $x = 0$ и $x = L$, всюду плотно в $H_0^1(0,L)$ (это следует из теоремы

Вейрштрасса, теоремы о плотности гладких функций в $H^1(0,L)$ и конструкции оператора следа). Каждый

многочлен, который равен нулю в точках $x = 0$ и $x = L$, имеет вид $P(x) = x^m(L-x)^nQ(x)$, где $m, n \geq 1$, Q — другой многочлен, поэтому его можно получить как линейную комбинацию полиномов из приведённой выше системы.

Многочлены из системы $\{x^j(L-x)^k\}_{j,k=1}^\infty$ можно

упорядочить по возрастанию степеней: а) многочлен второй степени $x(L-x)$; б) многочлены третьей степени

$\{x^2(L-x), x(L-x)^2\}$; в) многочлены четвёртой степени

$\{x^3(L-x), x^2(L-x)^2, x(L-x)^3\}$ и т.д. Все многочлены в системе $\{x^k(L-x), x^{k-1}(L-x)^2, \dots, x(L-x)^k\}$ ($k \geq 1$)

линейно независимы. Действительно, если предположить,

что $\alpha_1 x^k(L-x) + \alpha_2 x^{k-1}(L-x)^2 + \dots + \alpha_k x(L-x)^k = 0$ для

каких-нибудь $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то, дифференцируя по x , будем

иметь: $\alpha_1 k x^{k-1}(L-x) + \alpha_1 x^k(-1) + \alpha_2(k-1)x^{k-2}(L-x)^2 +$

$+ \alpha_2 x^{k-1}2(L-x)(-1) + \dots + \alpha_k(L-x)^k + \alpha_k x k(L-x)^{k-1}(-1) = 0$.

Подстановка $x = 0$ даёт $\alpha_k = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 x^k(L-x) + \alpha_2 x^{k-1}(L-x)^2 + \dots + \alpha_{k-1} x^2(L-x)^{k-1} = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1 x^{k-1}(L-x) + \alpha_2 x^{k-2}(L-x)^2 + \dots + \alpha_{k-1} x(L-x)^{k-1} = 0.$$

Повторяя предыдущие рассуждения имеем $\alpha_{k-1} = \dots = \alpha_1 = 0$.

Однако, между собой указанные системы однородных полиномов линейно зависимы. Например,

$$x^2(L-x) + x(L-x)^2 = x(L-x)(x+L-x) = Lx(L-x);$$

$$x^3(L-x) - x(L-x)^3 = x(L-x)(x^2 - (L-x)^2) = x(L-x)(2Lx - L^2) = 2Lx^2(L-x) - L^2x(L-x);$$

$$x^3(L-x) + x^2(L-x)^2 = x^2(L-x)(x+L-x) = Lx^2(L-x) \dots$$

Одна из максимальных линейно независимых подсистем имеет вид $\{x^j(L-x)\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow$ полиномиальный базис в $H_0^1(0,L)$ есть $\{x^j(L-x)\}_{j=1}^{\infty}$.

- тригонометрический базис в пространстве $H_0^1(0,L)$ имеет вид $\left\{ \sin \frac{\pi k x}{L} \right\}_{k=1}^{\infty}$. Действительно, последние функции

есть собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, которые

удовлетворяют условиям Дирихле на границе $(0,L)$. Хорошо известно, что они дают базис в $H_0^1(0,L)$.

- Система полиномов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$, очевидно, образует базис в пространстве $H^1(0,L)$.

- Тригонометрический базис в пространстве $H^1(0,L)$ имеет вид $\left\{ \cos \frac{\pi k x}{L} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Действительно, последние функции

есть собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, которые

удовлетворяют однородным условиям Неймана на границе интервала $(0,L)$. Из теории задач Штурма-Лиувилля известно, что они дают базис в $H^1(0,L)$.

- Система полиномов $\{x^{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ образует базис в пространстве $H'(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}$.

- Тригонометрический базис в пространстве

$H'(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}$ имеет вид

$\left\{ \sin \frac{\pi(k + 1/2)x}{L} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Действительно, последние функции

есть собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, которые

удовлетворяют однородному условию Дирихле при $x = 0$ и однородному условию Неймана при $x = L$.

- Система полиномов $\{(L - x)^k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $H''(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(L) = 0\}$.

- Тригонометрический базис в пространстве

$H''(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(L) = 0\}$ имеет вид

$\left\{ \cos \frac{\pi(k + 1/2)x}{L} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Действительно, последние функции

есть собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, которые

удовлетворяют однородному условию Неймана при $x = 0$ и однородному условию Дирихле при $x = L$.

Рассмотрим одномерную краевую задачу и соответствующую ей вариационную проблему с известным решением. Испытаем два базиса — полиномиальный и тригонометрический.

Пример. Краевая задача

$$\begin{cases} -u'' + u = x, 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

эквивалентна вариационной проблеме вида

$$E(u) = \int_0^1 (u'^2 + u^2) dx - 2 \int_0^1 x u dx \rightarrow \min, u \in H^1(0,1).$$

А именно, единственная экстремаль функционала энергии есть обобщённое решение краевой задачи (покажите это самостоятельно). С другой стороны, задача (5) имеет единственное решение, которое легко найти:

$$\hat{u}(x) = A \cosh x + B \sinh x + x, \hat{u}'(x) = A \sinh x + B \cosh x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \sinh 0 + B \cosh 0 + 1 = 0, \\ A \sinh 1 + B \cosh 1 + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1, \\ A = \frac{-1 + \cosh 1}{\sinh 1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{u}(x) = \frac{-1 + \cosh 1}{\sinh 1} \cosh x - \sinh x + x.$$

Рассмотрим в пространстве $H^1(0,1)$ базис $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ и организуем схему метода Ритца построения минимизирующей последовательности $\{u_k\}_{k=0}^\infty$, сходящейся к экстремали. Пусть $u_k(x) = c_0^{(k)}e_0(x) + c_1^{(k)}e_1(x) + \dots + c_k^{(k)}e_k(x)$,

$$(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx \text{ — стандартное скалярное}$$

произведение в $H^1(0,1)$. Тогда вариационная проблема на подпространстве $E_k = \text{Lin}(e_0, e_1, \dots, e_k)$ имеет вид

$$\sum_{i,j=0}^k (e_i, e_j) c_i^{(k)} c_j^{(k)} - 2 \sum_{i=0}^k c_i^{(k)} (x, e_i)_{L_2(0,1)} \rightarrow \min.$$

Пусть $G^{(k)} = \left((e_i, e_j) \right)_{i,j=1}^k$ — матрица Грама порядка $(k+1)$ системы $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$;

$$f^{(k)} = \left((x, e_0)_{L_2(0,1)}, (x, e_1)_{L_2(0,1)}, \dots, (x, e_k)_{L_2(0,1)} \right)^T \text{ — столбец}$$

скалярных произведений. Тогда единственная точка

экстремума $\hat{c}^{(k)} = \left(c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \dots, c_k^{(k)} \right)^T$ есть решение системы линейных уравнений

$$G^{(k)} \hat{c}^{(k)} = f^{(k)} \Rightarrow \hat{c}^{(k)} = G^{-(k)} f^{(k)}.$$

Итак, k -ое приближение Ритца имеет вид $u_k(x) = \sum_{i=0}^k \hat{c}^{(k)} x^i$.

Последовательность приближений Ритца $u_k \rightarrow \hat{u}$ при $k \rightarrow \infty$ в $H^1(0,1)$. Реализуем описанную схему в Maple и сравним два базиса — полиномиальный и тригонометрический (см.

пример #0 в оригинальном MAPLE-документе на [странице](#) курса в LMS).

Вывод: тригонометрический базис лучше с вычислительной точки зрения (матрица Грама оказывается диагональной), однако, полиномиальный базис лучше в том смысле, что значение функционала энергии его приближения Ритца меньше (дельты энергий отличаются примерно в 20 раз).

Рассмотрим два базиса в энергетическом пространстве:

- полиномиальный базис в $H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{x=0} = 0 \right\}$ имеет вид $\{x^{k+1}y^j\}_{k=0,j=0}^{\infty,\infty}$;
- тригонометрический базис в $H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{x=0} = 0 \right\}$ представляет собой $\left\{ \sin(\pi(k+1/2)x) \cos(\pi jy) \right\}_{k=0,j=0}^{\infty,\infty}$.

Оба базиса образованы произведениями базисных функций пространств $H'(0,1)$ и $H^1(0,1)$.

4) Получим общую схему Ритца построения минимизирующей последовательности, сходящейся к экстремали $\arg\min_{u \in H} E(u)$.

Пусть $\{\tilde{e}_{kj}\}_{k,j=0}^{\infty}$ — какой-нибудь из двух выбранных базисов в энергетическом пространстве H . Пусть $N \in \mathbb{N}$; рассмотрим подпространство размерности N^2 , построенное на базисных функциях, имеющее вид $E_N = \text{Lin} \{\tilde{e}_{kj}\}_{k,j=0}^{N-1}$. Перенумеруем каким-нибудь образом базисные функции с помощью единственного индекса $s = 0, \dots, N^2 - 1$: $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{N^2-1}$. Например, можно положить $e_0 = \tilde{e}_{00}$, $e_1 = \tilde{e}_{10}$, $e_2 = \tilde{e}_{01}$, $e_3 = \tilde{e}_{20}$, $e_4 = \tilde{e}_{11}$, $e_5 = \tilde{e}_{02}$, $e_6 = \tilde{e}_{30}, \dots$, $e_{N^2-2} = e_{N-2,N-1}$, $e_{N^2-1} = \tilde{e}_{N-1,N-1}$.

- Построим матрицу Грама $G_N = (g_{st})_{s,t=0}^{N^2-1}$ системы функций $\{e_s\}_{s=0}^{N^2-1}$, положив

$$g_{st} = (e_s, e_t)' = \iint_{\Omega} (1 + x^2 y) \left(\frac{\partial e_s}{\partial x} \frac{\partial e_t}{\partial x} + \frac{\partial e_s}{\partial y} \frac{\partial e_t}{\partial y} \right) dx dy + \int_0^1 e_s(x, 0) e_t(x, 0) dx.$$

G_N — симметрическая и положительно определённая матрица порядка N^2 .

- Построим столбец $\Phi_N = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N^2-1})^T$, соответствующий граничной функции $\varphi \in L_2(0, 1)$ в краевом условии $u_y \Big|_{y=1} = \varphi(x)$. Имеем

$$\varphi_s = \int_0^1 (1 + x^2) \varphi(x) e_s(x, 1) dx, \quad s = 0, \dots, N^2 - 1.$$

- Построим столбец $F_N = (f_0, f_1, \dots, f_{N^2-1})^T$, соответствующий функции $f \in L_2(\Omega)$ в правой части уравнения:

$$f_s = \iint_{\Omega} f(x, y) e_s(x, y) dx dy, \quad s = 0, \dots, N^2 - 1.$$

Пусть $u_N \in E_N$, т.е. $u_N(x, y) = c_0^{(N)} e_0(x, y) + c_1^{(N)} e_1(x, y) + \dots + c_{N^2-1}^{(N)} e_{N^2-1}(x, y)$. Вариационная проблема на подпространстве E_N имеет вид

$$\sum_{s,t=0}^{N^2-1} g_{st} c_s^{(N)} c_t^{(N)} - 2 \sum_{s=0}^{N^2-1} c_s^{(N)} (\varphi_s + f_s) \rightarrow \min. \quad (6)$$

Единственная точка экстремума $\hat{c}^{(N)} = (c_0^{(N)}, c_1^{(N)}, \dots, c_{N^2-1}^{(N)})^T$ (решение задачи (6)) удовлетворяет системе линейных уравнений

$$G_N \hat{c}^{(N)} = F_N + \Phi_N \Rightarrow \hat{c}^{(N)} = G_N^{-1} (F_N + \Phi_N). \quad (7)$$

Итак, N -ое приближение Ритца имеет вид

$$\hat{u}_N(x, y) = \hat{c}_0^{(N)} e_0(x, y) + \hat{c}_1^{(N)} e_1(x, y) + \dots + \hat{c}_{N^2-1}^{(N)} e_{N^2-1}(x, y);$$

вектор коэффициентов $\left(\hat{c}_0^{(N)}, \hat{c}_1^{(N)}, \dots, \hat{c}_{N^2-1}^{(N)}\right)^T = \hat{c}^{(N)}$ есть единственное решение системы (7). Последовательность $\{\hat{u}_N\}_{N=1}^\infty$ сходится в энергетическом пространстве к u^* — единственной экстремали функционала энергии (4) и единственному обобщённому решению краевой задачи (1).

5) Для указанных правых частей получим в MAPLE 2025 приближение Ритца $U_{N,N}(x, y)$ для первых $N \times N = N^2$ базисных функций при $N = 4$ (см. оригинальный MAPLE-документ на [странице](#) курса в LMS; free-trial версия математической среды доступна по [ссылке](#), она работает 15 дней).

restart;

with(plots) : with(LinearAlgebra) :

• **Зададим билинейную симметрическую форму.**

scalprod := (u, v) → int((1 + x² · y) · (diff(u, x) · diff(v, x) + diff(u, y) · diff(v, y)), [x = 0 .. 1, y = 0 .. 1]) + int(subs(y = 0, u) · subs(y = 0, v), x = 0 .. 1);

scalprod := (u, v) → ∫₀¹ ∫₀¹ (x² y + 1) ⋅ ((∂/∂x u) (∂/∂x v) + (∂/∂y u) (∂/∂y v)) dx dy + ∫₀¹ subs(y = 0, u) subs(y = 0, v) dx

= 0, u) subs(y = 0, v) dx

• **Зададим часть линейного функционала, которая зависит от граничной функции φ .**

linphi := (u, phi) → int((1 + x²) · phi · subs(y = 1, u), x = 0 .. 1);

linphi := (u, φ) → ∫₀¹ (x² + 1) · φ · subs(y = 1, u) dx

• **Зададим часть линейного функционала, зависящую от правой части f .**

linf := (u, f) → int(f · u, [x = 0 .. 1, y = 0 .. 1]);

linf := (u, f) → ∫₀¹ ∫₀¹ f · u dx dy

• **Определимся с глубиной разложения.**

N := 4;

N := 4

• **Рассмотрим полимиальный базис с двойной индексацией.**

epolkj := (k, j) → x^{k+1} · y^j;

epolkj := (k, j) → x^{k+1} · y^j

• **Сделаем перенумерацию полиномиальных базисных функций.**

epols := Vector(N²) : s := 0;

s := 0

```

for  $i$  from 0 to  $2 \cdot N - 2$  do
for  $j$  from  $i - \min(i, N - 1)$  to  $\min(i, N - 1)$  do
 $s := s + 1$ ;  $epols[s] := epolkj(i - j, j)$  end do
end do;

```

- Первая, N -ая и последняя базисные функции:

$epols[1], epols[N], epols[N^2]$;

$$x, x^3, x^4 y^3$$

- Построим матрицу Грама полиномиального базиса.

$GNpol := Matrix(N^2, N^2)$:

```

for  $i$  from 1 to  $N^2$  do

```

$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{19}{60}$	...
$\frac{3}{2}$	$\frac{29}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{81}{35}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{29}{45}$	$\frac{7}{20}$	...
$\frac{11}{18}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{317}{420}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{133}{180}$	...
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{181}{70}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{93}{70}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{37}{100}$	...
$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{577}{630}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{124}{105}$	$\frac{47}{48}$	$\frac{138}{175}$	$\frac{79}{120}$	...
$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1397}{2100}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{167}{175}$	...
$\frac{3}{2}$	$\frac{81}{35}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{124}{105}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{86}{105}$	$\frac{23}{60}$	...
$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{317}{420}$	$\frac{93}{70}$	$\frac{47}{48}$	$\frac{1397}{2100}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1411}{1260}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{17}{28}$	...
$\frac{11}{24}$	$\frac{29}{45}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{138}{175}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{86}{105}$	$\frac{33}{40}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{683}{840}$	...
$\frac{19}{60}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{133}{180}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{167}{175}$	$\frac{23}{60}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{683}{840}$	$\frac{911}{840}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

16 × 16 Matrix

- Рассмотрим тригонометрический базис с двойной индексацией.

$etrigkj := (k, j) \rightarrow \sin\left(\text{Pi} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot x\right) \cdot \cos(\text{Pi} \cdot j \cdot y)$;

$$etrigkj := (k, j) \mapsto \sin\left(\pi \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot x\right) \cdot \cos(\pi \cdot j \cdot y)$$

- Сделаем перенумерацию тригонометрических базисных функций.

$etrigs := Vector(N^2) : s := 0$;

$s := 0$

```

for  $i$  from 0 to  $2 \cdot N - 2$  do
for  $j$  from  $i - \min(i, N - 1)$  to  $\min(i, N - 1)$  do
 $s := s + 1$ ;  $etrigs[s] := etrigkj(i - j, j)$  end do
end do;

```


- Первая, N -ая и последняя базисные функции:

$etrigs[1], etrigs[N], etrigs[N^2];$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right), \sin\left(\frac{7\pi x}{2}\right) \cos(3\pi y)$$

- Построим матрицу Грама тригонометрического базиса.

$GNtrig := Matrix(N^2, N^2) :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do**

for j **from** i **to** N^2 **do**

$GNtrig[i, j] := scalprod(etrigs[i], etrigs[j]);$

$GNtrig[j, i] := GNtrig[i, j];$

end do end do;

- Посмотрим на часть матрицы Грама тригонометрического базиса.

$GNtrig;$

$$\begin{bmatrix} \frac{7\pi^2}{48} + \frac{3}{8} & -\frac{9}{32} & -\frac{\pi^2 - 6}{12\pi^2} + \frac{1}{2} & \frac{25}{288} & \frac{9}{8\pi^2} \\ -\frac{9}{32} & \frac{21\pi^2}{16} + \frac{3}{8} & \frac{9}{8\pi^2} & -\frac{225}{128} & -\frac{3\pi^2 - 2}{4\pi^2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi^2 - 6}{12\pi^2} + \frac{1}{2} & \frac{9}{8\pi^2} & \frac{11}{16} + \frac{35\pi^2}{96} & -\frac{25}{72\pi^2} & -\frac{29}{64} \\ \frac{25}{288} & -\frac{225}{128} & -\frac{25}{72\pi^2} & \frac{175\pi^2}{48} + \frac{3}{8} & \frac{225}{32\pi^2} \\ \frac{9}{8\pi^2} & -\frac{3\pi^2 - 2}{4\pi^2} + \frac{1}{2} & -\frac{29}{64} & \frac{225}{32\pi^2} & \frac{67}{144} + \frac{91\pi^2}{96} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{37\pi^2 + 162}{108\pi^2} + \frac{1}{2} & 0 & \frac{205}{72\pi^2} \\ -\frac{49}{1152} & \frac{441}{800} & \frac{49}{288\pi^2} & -\frac{1225}{288} & -\frac{441}{200\pi^2} \\ -\frac{25}{72\pi^2} & \frac{225}{32\pi^2} & \frac{77}{576} & -\frac{25\pi^2 - 6}{12\pi^2} + \frac{1}{2} & -\frac{293}{256} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{205}{72\pi^2} & 0 & -\frac{231\pi^2 - 26}{324\pi^2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi^2 - 6}{108\pi^2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{8\pi^2} & \frac{1}{2} & -\frac{25}{648\pi^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

- Зададим граничную функцию φ и правую часть уравнения f .

$\text{phi} := x; f := 1;$

$$\phi := x$$

$$f := 1$$

- Сформируем столбец, соответствующий граничной функции φ , для полиномиального базиса.

$\text{PhiNpol} := Vector(N^2) :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $\text{PhiNpol}[i] := \text{linphi}(epols[i], \text{phi})$ **end do;**

- Сформируем столбец, соответствующий граничной функции φ , для тригонометрического базиса.

$\text{PhiNtrig} := Vector(N^2) :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $\text{PhiNtrig}[i] := \text{linphi}(etrigs[i], \text{phi})$ **end do;**

- Сформируем столбец, соответствующий правой части f , для полиномиального базиса.

$FNpol := Vector(N^2) :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $FNpol[i] := \text{linf}(epols[i], f)$ **end do**:

- Сформируем столбец, соответствующий правой части f , для полиномиального базиса.

$FNtrig := Vector(N^2) :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $FNtrig[i] := \text{linf}(etrigs[i], f)$ **end do**:

- Находим коэффициенты приближения Рунца (полиномиальный базис).

$uNpolvec := \text{LinearSolve}(GNpol, FNpol + \text{PhiNpol}) ;$

$uNpolvec :=$

376465260243673730301961518959205344248510
389350920870063898988817513411655217726477
178691794308095417448376108708996364436646
389350920870063898988817513411655217726477
350317584893495882869088575622209352381040
389350920870063898988817513411655217726477
4831914432302223738586272755455598075425
389350920870063898988817513411655217726477
129204737725030182406715988161765723935650
389350920870063898988817513411655217726477
36911129056149438498573339883721784894010
389350920870063898988817513411655217726477
9224021408749161520110599174210482108258
389350920870063898988817513411655217726477
46797835687144009176334804060297460521140
389350920870063898988817513411655217726477
327797258195767140428983210712257569526560
389350920870063898988817513411655217726477
60630178707897591565523905165240893311620
389350920870063898988817513411655217726477
⋮

16 element Vector[column]

- Находим коэффициенты приближения Рунца (тригонометрический базис).

$uNtrigvec := \text{LinearSolve}(GNtrig, FNtrig + \text{PhiNtrig}) :$

- Сформируем приближение Рунца для полиномиального базиса.

$uNpol := 0 :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $uNpol := uNpol + uNpolvec[i] \cdot epols[i]$ **end do**:

- Сформируем приближение Рунца для тригонометрического базиса.

$uNtrig := 0 :$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $uNtrig := uNtrig + \text{evalf}(uNtrigvec[i]) \cdot etrigs[i]$ **end do**:

- Посмотрим на то, что у нас получилось:

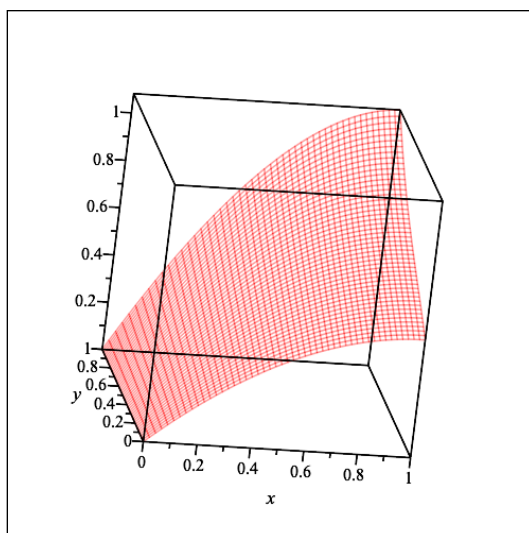
$uNpol;$

$$\begin{aligned}
& -\frac{361208637369928927091073243652020803003560}{389350920870063898988817513411655217726477}x^4y^3 + \frac{690169883479716658615744067238725738546320}{389350920870063898988817513411655217726477}x^3y^3 + \\
& \frac{333811170737954991157147400024784123549360}{389350920870063898988817513411655217726477}x^4y^2 - \frac{283546639667500052961724374658105625232200}{389350920870063898988817513411655217726477}x^2y^3 - \\
& \frac{702369382223418085949737789737140411805930}{389350920870063898988817513411655217726477}x^3y^2 + \frac{24817365113275262078484651446095050404028}{389350920870063898988817513411655217726477}x^4y + \\
& \frac{60630178707897591565523905165240893311620}{389350920870063898988817513411655217726477}x^2y^2 - \frac{327797258195767140428983210712257569526560}{389350920870063898988817513411655217726477}x^2y^2 - \\
& \frac{46797835687144009176334804060297460521140}{389350920870063898988817513411655217726477}x^3y - \frac{9224021408749161520110599174210482108258}{389350920870063898988817513411655217726477}x^4 - \\
& \frac{36911129056149438498573339883721784894010}{389350920870063898988817513411655217726477}x^2y^2 - \frac{129204737725030182406715988161765723935650}{389350920870063898988817513411655217726477}x^2y + \\
& \frac{4831914432302223738586272755455598075425}{389350920870063898988817513411655217726477}x^3 + \frac{350317584893495882869088575622209352381040}{389350920870063898988817513411655217726477}xy - \\
& \frac{178691794308095417448376108708996364436646}{389350920870063898988817513411655217726477}x^2 + \frac{376465260243673730301961518959205344248510}{389350920870063898988817513411655217726477}x
\end{aligned}$$

б) Визуализируем в MAPLE приближения Ритца, т.е. построим двумерную поверхность — график $U_{N,N}(x, y)$ (и сравним графики при разных значениях N).

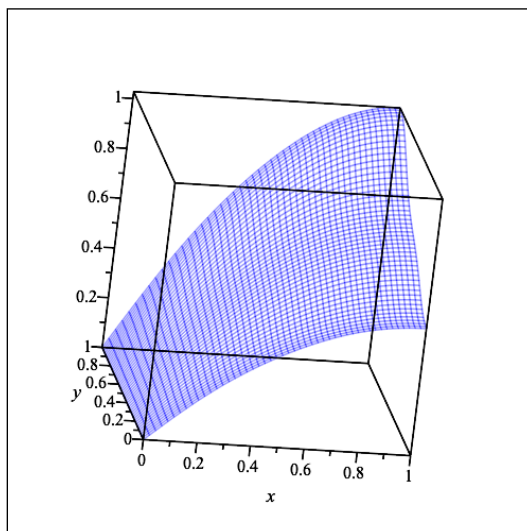
- Визуализируем приближение Ритца (полиномиальный базис).

`plot3d(uNpol, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, size = [default, square], orientation = [-80, 70, 20]);`



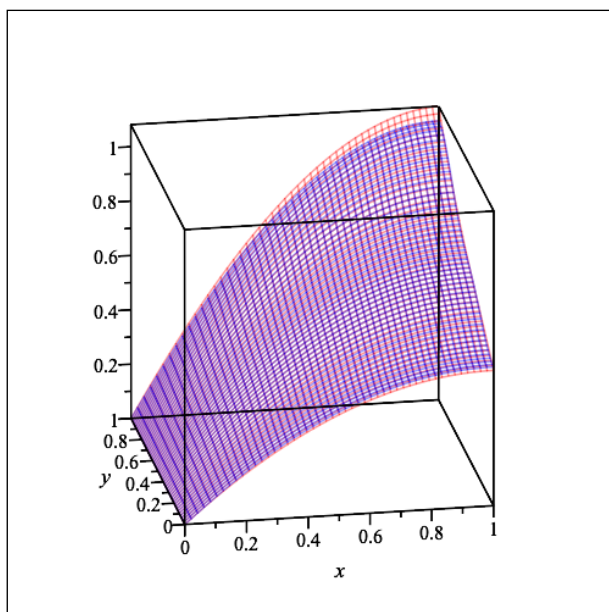
- Визуализируем приближение Ритца (тригонометрический базис).

`plot3d(uNtrig, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, size = [default, square], orientation = [-80, 70, 20]);`



- Построим оба приближения в одной системе координат.

```
plot3d([uNpol, uNtrig], x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, color = [red, blue], size = [default, square], orientation = [-100, 70, 0]);
```



Мы видим небольшое расхождение двух приближённых решений. Чтобы понять, какое из них лучше, сравним значения функционала энергии.

```
Epol := evalf(scalprod(uNpol, uNpol) - 2·linphi(uNpol, phi) - 2·linf(uNpol, f) );
```

```
Epol := -1.186921366
```

```
Etrig := evalf(scalprod(uNtrig, uNtrig) - 2·linphi(uNtrig, phi) - 2·linf(uNtrig, f) );
```

```
Etrig := -1.153466911
```

```
Etrig - Epol;
```

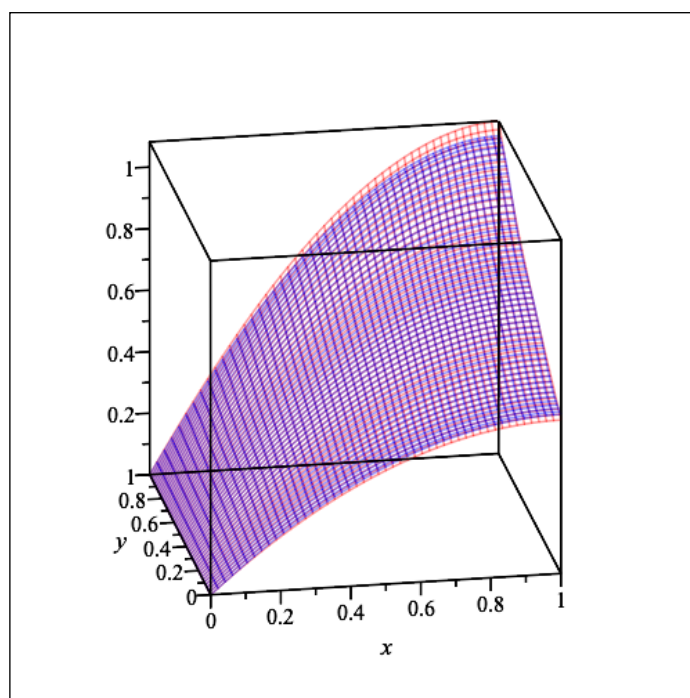
```
0.033454455
```

Итак, тригонометрический базис оказался хуже полиномиального: энергия приближения Ритца, построенного на первом, примерно на $1/30$ больше, чем энергия приближения Ритца, построенного на полиномиальном базисе. Кроме того, вычисления в случае тригонометрического базиса требуют больше времени.

Увеличим число базисных функций с $4^2 = 16$ до $5^2 = 25$ и найдём приближения Ритца увеличенной глубины для полиномиального и тригонометрического базисов.

- Построим оба приближения в одной системе координат.

```
plot3d([uNpol, uNtrig], x = 0 .. 1, y = 0 .. 1, color = [red, blue], size = [default, square], orientation = [-100, 70, 0]);
```



Теперь два приближённых решения чуть больше похожи друг на друга. Чтобы понять, какое из них лучше, снова сравним значения функционала энергии на приближениях Ритца — полиномиальном и тригонометрическом.

```
Epol := evalf(scalprod(uNpol, uNpol) - 2·linphi(uNpol, phi) - 2·linf(uNpol, f) );
```

```
Epol := -1.186955318
```

```
Etrig := evalf(scalprod(uNtrig, uNtrig) - 2·linphi(uNtrig, phi) - 2·linf(uNtrig, f) );
```

```
Etrig := -1.155010425
```

```
Etrig - Epol;
```

```
0.031944893
```

Вывод: энергия приближения Ритца, построенного на полиномиальном базисе, изменилась незначительно, а энергия тригонометрического приближения Ритца немного уменьшилась. Следовательно, полиномиальное приближение Ритца уже весьма близко к истинному решению, тогда как тригонометрическое приближение ещё требует увеличения N .