

## Линейные гиперболические уравнения второго порядка

**Задача 1.** Найти общее решение гиперболического уравнения второго порядка на плоскости:  $u_{xy} - xu_x + u = 0$ .

**Задача 2.** Решить задачу Коши, указать область единственности и область влияния:

$$\begin{cases} xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, 0 < x < 1, \\ u|_{y=0} = x, u_y|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: привести уравнение к каноническому виду, найти общее решение, затем, вернувшись к старым переменным, подставить общее решение в условия задачи Коши и найти её решение.

**Задача 3.** Решить задачу Гурса в указанной области:

$$\begin{cases} 2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, y > |x|, \\ u|_{y=x} = 1, u|_{y=-x} = (x+1)e^x. \end{cases}$$

Указание: привести уравнение к каноническому виду, найти общее решение, затем, вернувшись к старым переменным, подставить общее решение в условия задачи Гурса и найти её решение.

**Задача 4.** Рассмотрим некорректную задачу Коши на характеристике:

$$\begin{cases} u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0, \\ u|_{y=6x} = \varphi(x), u_y|_{y=6x} = \psi(x). \end{cases}$$

Привести пример таких функций  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1)$ ,  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^1)$ , что эта задача а) имеет классическое решение; б) не имеет классических решений. Будет ли классическое решение в пункте а) единственным? Ответ обосновать.

**Задача 5.** Построить функцию Римана оператора  $\mathcal{L}u = xu_{xy} + xu_x - u_y - u$  в области  $x > 0, y > 0$ .

**Задача 6.** Методом Римана решить задачу Коши для уравнения Клейна-Гордона ( $b$  — вещественный параметр):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + bu = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на [alexander@baikov.org](mailto:alexander@baikov.org), или отправляются в LMS на [странице](#)

курса. Чтобы получить зачёт за пятое общее дом. задание, необходимо правильно решить любые четыре задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2024/25 уч.г.**

### Ресурсы для решения общего дом. задания #5

1. **Материалы** к практическим занятиям по теме «Линейные гиперболические 2D уравнения второго порядка».
2. [Презентация](#) лекционной темы #5 «Задача Коши».
3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.
5. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.