

Уравнения в частных производных

Введение. Классификация и канонический вид

А.Е. Байков

<https://baikov.org/pde>

Содержание

1. Введение. Классификация уравнений
2. Приведение 2D полулинейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду
3. Инвариантные преобразования двумерного уравнения Лапласа

Прerequisites курса

- 1) **Линейная алгебра:** квадратичные формы, ортогональные операторы, метод Лагранжа, обращение матриц, решение СЛАУ...
- 2) **Математический анализ:** дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, формула Гаусса-Остроградского, функциональные ряды, равномерная сходимость...
- 3) **Дифференциальные уравнения:** уравнения первого порядка, линейные уравнения с постоянными коэффициентами, линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, краевые задачи для линейных уравнений второго порядка, функция Грина...

Прerequisites курса

- 4) **Теория функций комплексной переменной:** конформные отображения...
- 5) **Функциональный анализ:** теорема Арцела, гильбертово пространство, линейные ограниченные функционалы, норма функционала, норма оператора, принцип непрерывного продолжения, компактные операторы, фредгольмовы операторы, теорема Фредгольма, теорема Гильберта–Шмидта...

Примеры уравнений: уравнения первого порядка

‘Уравнения в частных производных’ (альтернативное название ‘Уравнения математической физики’) принадлежат к плеяде дисциплин, объединённых под вывеской ‘Математическая физика’, и питаются из двух неиссякаемых источников: 1) теоретическая физика; 2) дифференциальная геометрия.

- Уравнение неразрывности (механика сплошных сред)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}(x, t)) = 0,$$
 где $\rho = \rho(x, t)$ — неизвестная плотность,
 $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$ — известное поле скоростей сплошной среды.
Выражает в дифференциальной форме закон сохранения массы.

Примеры уравнений: уравнения первого порядка, уравнение Лапласа

- Уравнение Хопфа (механика сплошных сред) $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; здесь $u = u(x, t)$ — неизвестная скорость. Описывает динамику одномерной сплошной среды, состоящей из свободных частиц.
- Уравнение Гамильтона–Якоби (классическая механика)
 $\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t \right) = 0$, где $S = S(\vec{q}, t)$ — неизвестное *действие*,
 $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ — известная функция Гамильтона.
- Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ и уравнение Пуассона $\Delta u = f$ (электростатика, гидродинамика... практически все разделы физики, включая квантовую механику и КТП); здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа.

Примеры уравнений: линейные уравнения второго порядка

- Уравнение Гельмгольца (теория упругости и не только) $\Delta u + k^2 u = 0$, где Δ — тот же оператор Лапласа, $k > 0$ — параметр, $u = u(x)$ — неизвестная функция.
- Уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t)$, где $u = u(x, t)$ — неизвестное распределение температуры, $a > 0$ — параметр, f — известная функция.
- Волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t)$, где $u = u(x, t)$ — неизвестное распределение температуры, $a > 0$ — параметр, f — известная функция.
- Уравнение Шрёдингера (квантовая механика) $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(x, t) \Psi$. Здесь i — мнимая единица, $\hbar > 0$ — постоянная Планка, $m > 0$ — параметр (масса), Δ — оператор Лапласа (относительно пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$), $V = V(x, t)$ — потенциал, $\Psi = \Psi(x, t)$ — неизвестные волновая функция системы.

Примеры уравнений: некоторые нелинейные уравнения второго порядка

- Уравнение Монжа—Ампера (дифференциальная геометрия)

$$u_{xx}u_{yy} - \left(u_{xy}\right)^2 = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + f(x, y),$$

где $u = u(x, y)$ — неизвестная функция, a, b, c, f — известные функции.

- Уравнение Бюргерса $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $\nu > 0$ — вязкость. При $\nu = 0$ получаем уравнение Хопфа (уравнение Бюргерса рассматривается в методе исчезающей вязкости).

- Нелинейное уравнение Шрёдингера $i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa|\psi|^2\psi$
(интегрируемые системы математической физики).

Примеры уравнений: система уравнений Навье—Стокса

Система d -мерных уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu(\nabla \cdot \nabla)u - \nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases}$$

где $\nu > 0$ — вязкость, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_d}\mathbf{e}_d$ —

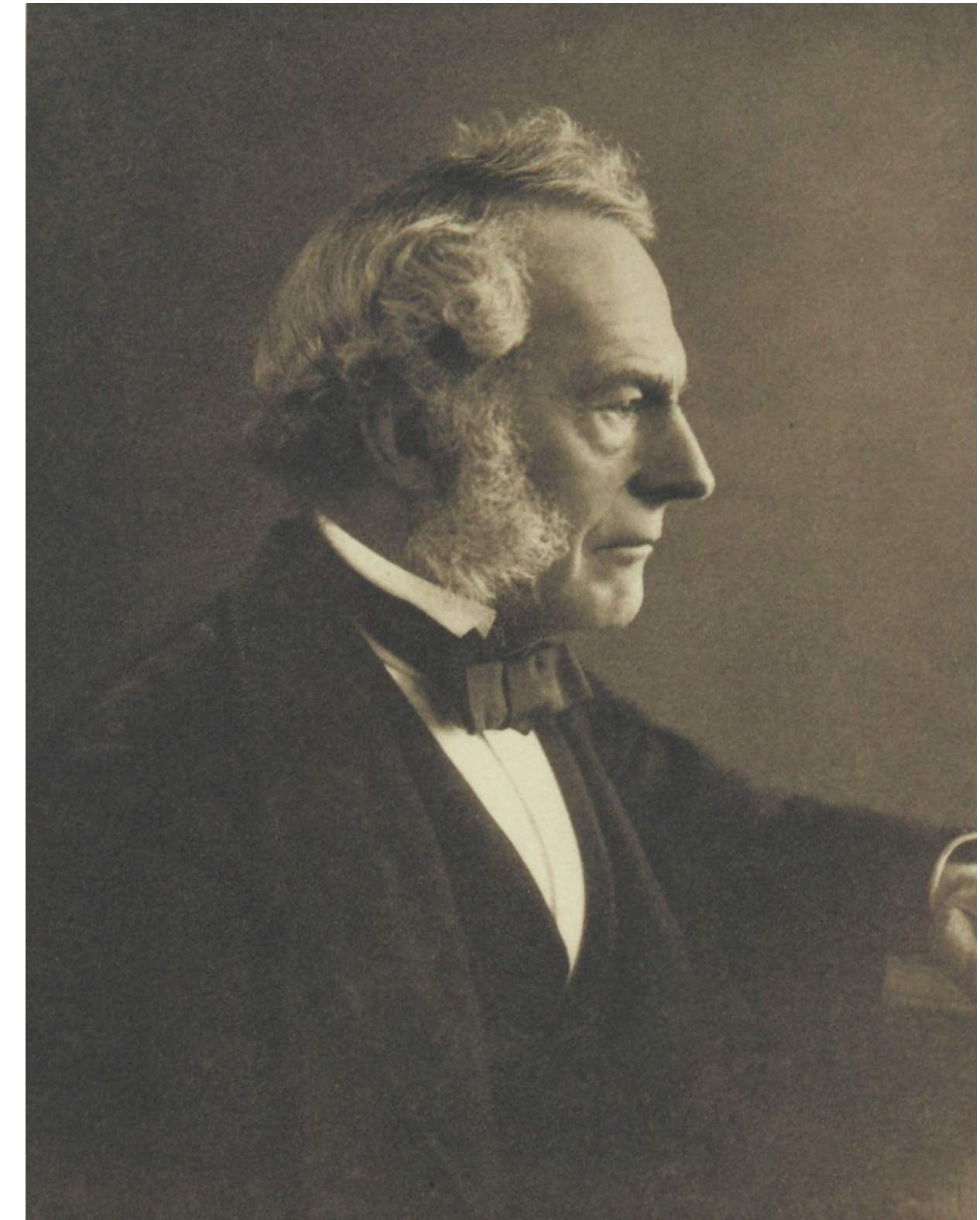
векторный дифференциальный оператор Гамильтона,

$\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа,

$u \cdot \nabla = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots u_d \frac{\partial}{\partial x_d}$, $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^d$ —

неизвестное векторное поле скоростей, $p : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$

— неизвестное скалярное поле давлений.



Sir George Gabriel Stokes
(1819 — 1903)

Некоторые обозначения

- $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство;
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) (\alpha_j \in \mathbb{Z}, \alpha_j \geq 0)$ — мультииндекс;
- $\mathbb{Z}_+^n = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j \in \mathbb{Z}, \alpha_j \geq 0 \right\}$ — множество всех мультииндексов размерности n ;
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ — порядок мультииндекса;
- $u = u(x), x = (x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная функция в каком-нибудь уравнении с частными производными;
- $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — частная производная порядка $|\alpha|$ функции $u = u(x)$, соответствующая мультииндексу α .

Линейные дифференциальные операторы

Определение 1.1. *Линейным дифференциальным оператором (ЛДО) называется оператор $\mathcal{L}$, действующий на гладкие функции следующим образом:*

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u. \quad (1.1)$$

Заданные функции a_α называются *коэффициентами оператора*. Если $\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| > 0$, то число $m \in \mathbb{Z}_+$ —

порядок оператора $\mathcal{L}$ (обозначение: $\text{ord } \mathcal{L} = m$).

Символ и главный символ. Линейные дифференциальные уравнения

- *Символом* оператора (1.1) называется функция
$$P(\xi; x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \text{ где } \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$
- *Главным символом* оператора (1.1) называется однородная относительно переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ функция
$$P_0(\xi; x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — ЛДО порядка m . *Линейным дифференциальным уравнением* в частных производных порядка m называется уравнение вида $\mathcal{L}u = f$, где f — заданная функция, u — неизвестная функция.

Полулинейное уравнение второго порядка

Полулинейное уравнение второго порядка имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\nabla u, u, x) = 0. \quad (1.2)$$

Мы исследуем уравнение в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Построим матрицу $A(x) = \left(a_{ij}(x) \right)_{i,j=1}^n$.

Без ограничения общности можно считать, что $A(x)^T = A(x)$. Действительно, для функций $u \in C^2(\Omega)$ имеем $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, откуда следует равенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

в котором коэффициенты $\tilde{a}_{ij}(x) = \frac{1}{2} \left(a_{ij}(x) + a_{ji}(x) \right)$ симметричны по индексам i, j .

Главный символ уравнения второго порядка

Зафиксируем точку $x^0 \in \Omega$ и получим главный символ оператора уравнения (1.2). Он представляет собой квадратичную форму вида

$$Q(\xi; x^0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j = \xi^T A(x^0) \xi. \quad (1.3)$$

Невырожденное линейное преобразование $\xi = S\eta \Leftrightarrow \eta = P\xi$ преобразует квадратичную форму (1.3):

$$Q(\eta; x^0) = (S\eta)^T A S \eta = \eta^T S^T A S \eta = \eta^T P^{-T} A P^{-1} \eta.$$

Диагональный вид. Канонический вид

Из линейной алгебры известно, что всякая квадратичная форма $\mathcal{Q}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ допускает ортогональное преобразование S , приводящее форму к *диагональному виду*

$$S^T A(x^0) S = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \},$$

где на диагонали стоят собственные значения матрицы $A(x^0)$.

Или: существует невырожденное линейное преобразование $\xi = S\eta$, приводящее квадратичную форму $\mathcal{Q}$ к *каноническому виду*:

$$S^T A(x^0) S = \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n \}, \text{ где } \sigma_j \in \{1, -1, 0\}. \text{ Если}$$

согласовать расстановки, то $\sigma_j = \text{sign } \lambda_j$. Квадратичную форму можно привести к каноническому виду *методом Лагранжа*.

Классификация уравнений в точке

Тип уравнения (1.2) в точке x^0 полностью определяется главным символом в этой точке. Пусть n_+ — количество положительных собственных значений, n_- — количество отрицательных собственных значений, n_0 — кратность нулевого собственного значения матрицы $A(x^0)$ (или $n_0 = 0$, если $\det A(x^0) \neq 0$).

- Уравнение (1.2) имеет *эллиптический тип* в точке x^0 , если $n_+ = n$ или $n_- = n$.
- Уравнение (1.2) имеет *гиперболический тип* в точке x^0 , если $n_+ = n - 1, n_- = 1$ или $n_- = n - 1, n_+ = 1$.

Классификация уравнений в точке

- Уравнение (1.2) имеет *ультрагиперболический тип* в точке x^0 , если $n_0 = 0, n_+ > 1, n_- > 1$.
- Уравнение (1.2) имеет *параболический тип* в точке x^0 , если $n_0 = 1, n_+ = n - 1$ или $n_0 = 1, n_- = n - 1$.

Если $n_0 \geq 2$ или $n_0 = 1$, но $n_+ > 0$ и $n_- > 0$, то будем говорить о *вырожденном типе* в точке x^0 .

Упражнение. Определить тип уравнения Лапласа, уравнения теплопроводности, волнового уравнения.

Эллиптические операторы высших порядков

Определение 1.2. Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$ называется *эллиптическим* в области Ω , если для любой точки $x \in \Omega$ и любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ главный символ оператора не обращается в нуль: $P_0(x; \xi) \neq 0$.

- При $n > 2$ всякий эллиптический оператор имеет чётный порядок. Для размерности $n = 2$ это неверно: например, оператор Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ эллиптический, $P_0(\xi) = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{i}{2}\xi_2$, $\xi \in \mathbb{R}^2$.
- Однако же, если все коэффициенты оператора принимают вещественные значения, то и при $n = 2$ порядок эллиптического оператора всегда чётный.

Почему мы начинаем с эллиптических уравнений?

- **Физическое объяснение.** Эллиптические уравнения и краевые задачи для эллиптических уравнений описывают стационарные состояния (электростатическое поле, стационарное распределение температуры и прочее), а параболические и гиперболические уравнения описывают процессы. Уравнения первого порядка также имеют эволюционный характер.
- **Геометрическое объяснение.** В некотором смысле эллиптические операторы отвечают римановой геометрии, а гиперболические операторы геометрии Лобачевского. Точный смысл первого соответствия будет установлен при изучении оператора Лапласа на римановом многообразии.

Кроме того, без теории эллиптических уравнений невозможно в полную силу изучать гиперболические и, особенно, параболические уравнения.

Некоторые цели курса «Уравнения в частных производных»

1. **Методы решения краевых и начально-краевых задач.** В настоящем курсе будут рассмотрены следующие методы решения краевых задач: метод функции Грина, метод разделения переменных, метод Ритца (вариационный метод), проекционные методы, конечно-разностные методы. Многие методы позволяют доказать существование, предложив представление решения в виде интеграла, ряда и т.д.
2. **Функциональная теория.** Функциональная теория изучает в первую очередь корректность задач или фредгольмову разрешимость краевых задач, если корректности нет, а также спектральные свойства эллиптических операторов, дифференциальные свойства решений и пр. и пр.
3. **Качественная теория.** Часто о решениях краевых задач можно многое сказать, не предъявляя какой-либо формулы или метода построения. Этим и занимается качественная теория. Впервые с её элементами мы познакомимся в следующей теме, когда будем изучать гармонические функции.

Структура курса «Уравнения в частных производных»

- Первый модуль
 1. Введение. Классификация и канонический вид
 2. Оператор Лапласа
 3. Уравнения первого порядка
 4. Задача Коши: классическая теория
- Второй модуль
 5. Обобщённые функции и гармонический анализ
 6. Спектральная теория и полугруппы
 7. Пространства Соболева

Структура курса «Уравнения в частных производных»

- Третий модуль
 - 8. Краевые задачи для эллиптических уравнений
 - 9. Эллиптические и параболические операторы на многообразиях
 - 10. Гиперболические уравнения и системы
 - 11. Начально-краевые эволюционные задачи
 - 12. Уравнения Навье—Стокса

Векторно-матричная форма старшей части

Вспомним, что матрицей Гессе функции $u \in C^2(\Omega)$ называется квадратная матрица порядка n , элементы которой есть частные производные второго порядка этой функции: $H(u) = \left(u_{x_i x_j} \right)_{i,j=1}^n$. Если нужно подчеркнуть,

относительно каких переменных вычисляются производные, то будем использовать для этого нижний индекс. Перепишем уравнение (1.2) в виде

$$\operatorname{tr} \left(A H_x(u) \right) + F \left(\nabla_x u, u, x \right) = 0, \quad (1.4)$$

где tr — след матрицы (сумма диагональных элементов). Сделаем невырожденную линейную замену переменных $y = Rx$ в уравнении (1.4):

$$\operatorname{tr} \left(A R^T H_y(u) R \right) + F \left(R^T \nabla_y u, u, R^{-1} y \right) = 0. \quad (1.5)$$

Замена переменных в уравнении

Мы использовали известные законы преобразования градиента и матрицы Гессе функции при линейной замене переменных: $\nabla_x u = R^T \nabla_y u$, $H_x(u) = R^T H_y(u) R$. Поскольку $\text{tr}(PR) = \text{tr}(RP)$ и след произведения нескольких матриц остаётся прежним при циклической перестановке сомножителей, уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$\text{tr} \left(R A R^T H_y(u) \right) + F \left(R^T \nabla_y u, u, R^{-1} y \right) = 0. \quad (1.6)$$

Квадратичную форму $\mathcal{Q}$ можно привести к каноническому виду *методом Лагранжа*. В этом методе строится обратное преобразование $\eta = P\xi$, поэтому для приведения уравнения (1.4) к каноническому виду нужно сделать линейную замену переменных $y = P^{-T} x$ ($R = P^{-T}$), где $P^{-T} = (P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$.

$$\mathcal{Q}(\eta; x^0) = (S\eta)^T A S\eta = \eta^T S^T A S\eta = \eta^T P^{-T} A P^{-1} \eta$$

Алгоритм приведения к каноническому виду

Опишем приведение к каноническому виду полулинейного уравнения (1.4) с постоянными старшими коэффициентами в следующем алгоритме.

Алгоритм 1.1. Дано: полулинейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в старшей части (1.4). Требуется: определить тип и привести уравнение к каноническому виду.

- 1) Записать главный символ оператора уравнения — квадратичную форму $Q(\xi) = \xi^T A \xi$.
- 2) Методом Лагранжа найти преобразование $\eta = P\xi$, приводящее квадратичную форму Q к каноническому виду $Q(\eta) = \sigma_1 \eta_1^2 + \dots + \sigma_n \eta_n^2$, где $\sigma_i \in \{1, -1, 0\}$; определить тип уравнения.
- 3) Сделать замену переменных $y = P^{-T}x$ и записать канонический вид

$$\sigma_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \dots + \sigma_n \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + F\left(P^{-1} \nabla_y u, u, P^T y\right) = 0. \quad (1.7)$$

Содержание

1. Введение. Классификация уравнений
2. Приведение 2D полулинейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду
3. Инвариантные преобразования двумерного уравнения Лапласа

Уравнения с переменными старшими коэффициентами

Задача о приведении к каноническому виду полулинейного уравнения с тремя или большим числом переменным в окрестности точки, где оно имеет, например, эллиптический тип, может иметь преграды непреодолимого характера. Рассмотрим пример уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + k(x, y, z)u_{zz} = 0, \quad (1.8)$$

где k — гладкая и положительная в $\mathbb{R}^3$ функция, например, $k(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$. Очевидно, уравнение (1.8) имеет эллиптический тип во всём пространстве. С помощью нелинейной замены независимых переменных $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$ мы желаем получить уравнение с канонической старшей частью:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + \dots = 0.$$

Уравнения с переменными старшими коэффициентами

После указанной замены уравнение (1.8) принимает вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \left(k\zeta_z^2 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2 \right) u_{\zeta\zeta} + 2u_{\xi\zeta}\zeta_x + 2u_{\eta\zeta}\zeta_y + \dots = 0. \quad (1.9)$$

Чтобы старшая часть уравнения (1.9) имела канонический вид, необходимо требовать (для отсутствия членов со смешанными производными) $\zeta_x = 0$, $\zeta_y = 0$. Но тогда коэффициент при $u_{\zeta\zeta}$, который в каноническом виде должен быть равен единице, означает

$$\zeta_z = \frac{1}{\sqrt{k(x, y, z)}}. \text{ Очевидно, что функция } \zeta = \zeta(x, y, z), \text{ не зависящая от } x$$

и y , не может быть решением последнего уравнения, если функция k от этих переменных зависит.

2D полулинейные уравнения

Счастливым исключением, когда проблема о приведении к каноническому виду разрешима (по крайней мере локально) для произвольных (класса C^1) коэффициентов старшей части, служат 2D полулинейные уравнения. Рассмотрим полулинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0. \quad (1.10)$$

Здесь a, b, c — «хорошие» функции в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (нам будет достаточно $a, b, c \in C^1(\Omega)$), F — непрерывная функция. Сделаем замену переменных

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y), \quad (1.11)$$

где $\xi, \eta \in C^2(\Omega)$.

Преобразование уравнения

Предполагаем, что замена (1.11) — диффеоморфизм: 1) существует обратная замена $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$; 2) якобиан

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в } \Omega \text{ (невырожденность замены (1.11)).}$$

В новых переменных уравнение (1.10) имеет вид

$$\tilde{a}u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\eta\eta} + F(u_x, u_y, u, x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) + \dots = 0, \quad (1.12)$$

где, согласно цепному правилу, $u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x$, $u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y$. Выпишем выражения для коэффициентов старшей части преобразованного уравнения (1.12):

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad \tilde{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \\ \tilde{c} &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

Классификация 2D полулинейных уравнений второго порядка

Установим тип уравнения (1.10). Матрица коэффициентов старшей части $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение для неё есть $k^2 - (a + c)k + ac - b^2 = 0$. Имеем $k_1 k_2 = ac - b^2 = \det A$.

- Если $-\det A = b^2 - ac > 0$, то уравнение (1.10) имеет гиперболический тип. Канонический вид можно получить, если найти такую замену (1.11), что $\tilde{a} = -\tilde{c} \neq 0$, $\tilde{b} = 0$ в той части области Ω , где уравнение (1.10) имеет гиперболический тип.
- При $-\det A = b^2 - ac = 0$, но $a + c \neq 0$, уравнение (1.10) имеет параболический тип. Чтобы получить канонический вид, нужно найти такую замену (1.11), для которой $\tilde{a} = \tilde{b} = 0$, $\tilde{c} \neq 0$ в подобласти параболического типа.
- Если $-\det A = b^2 - ac < 0$, то уравнение (1.10) имеет эллиптический тип. Замена (1.11), обеспечивающая приведение уравнения к каноническому виду в эллиптической части области Ω , должна приводить к $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$, $\tilde{b} = 0$.

Гиперболический тип: уравнение в частных производных первого порядка

Вопреки ожидаемому каноническому виду, в котором $\tilde{a} = -\tilde{c} \neq 0$, $\tilde{b} = 0$, найдём такую замену переменных, что в преобразованном уравнении $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, $\tilde{b} \neq 0$. Если такая замена существует, то уравнение (1.10) приводится ко *второму каноническому виду* $2u_{\xi\eta} + \dots = 0 \Rightarrow u_{\mu\mu} - u_{\nu\nu} + \dots = 0$. Поиск замены связан с исследованием уравнения в частных производных первого порядка вида

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \quad (1.13)$$

А именно, требуется найти два независимых решения φ и ψ уравнения (1.13), сделать невырожденную замену $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, и проверить, что для этой замены $\tilde{b} \neq 0$.

Гиперболический тип: факторизация уравнения в частных производных

Предположим, что коэффициент $a \neq 0$ в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ гиперболического типа. Так как $b^2 - ac > 0$, уравнение (1.13) допускает факторизацию:

$$a \left(\xi_x - \lambda_1 \xi_y \right) \left(\xi_x - \lambda_2 \xi_y \right) = 0,$$

где λ_1, λ_2 — вещественные корни квадратного уравнения

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0. \quad (1.14)$$

Замечание. Если $a = 0$, но $c \neq 0$ в точке гиперболического типа, то рассуждения аналогичные (переменные x и y просто меняются ролями). Если же $a = c = 0$ в точке гиперболического типа, то нужно сделать специальную линейную замену переменных (как в методе Лагранжа, когда отсутствуют квадраты переменных), и тогда соответствующие коэффициенты в преобразованном уравнении будут отличны от нуля.

Гиперболический тип: решение линейного уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка $\xi_x - \lambda_1 \xi_y = 0$. Пусть $\xi = \varphi(x, y)$ — нетривиальное (отличное от постоянного) частное решение этого уравнения, градиентное векторное поле которого не обращается в нуль в окрестности точки гиперболического типа. Тогда $\varphi(x, y) = C_1$ есть общий интеграл дифференциального уравнения $dy + \lambda_1 dx = 0$. Действительно,

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = \lambda_1 \varphi_y dx + \varphi_y dy = \varphi_y (\lambda_1 dx + dy),$$

поэтому $d\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 dx + dy = 0$ (если $\varphi_y = 0$, то из равенства $\varphi_x - \lambda_1 \varphi_y = 0$ следует, что $\varphi_x = 0$, но по условию градиент функции не равен нулю в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ и её окрестности).

Гиперболический тип: решение линейного уравнения в частных производных первого порядка

Замечание. Общий интеграл $\varphi(x, y) = C_1$ обыкновенного дифференциального уравнения $dy + \lambda_1 dx = 0$, эквивалентного явному уравнению $y' = -\lambda_1$, всегда имеет то свойство, что $\varphi_y \neq 0$, поэтому требование ненулевого градиентного векторного поля в окрестности гиперболической точки избыточно.

Аналогично, если $\eta = \psi(x, y)$ — нетривиальное частное решение уравнения $\eta_x - \lambda_2 \eta_y = 0$, то $\psi(x, y) = C_2$ — общий интеграл уравнения $dy + \lambda_2 dx = 0$. Верно и обратное утверждение: если $\varphi(x, y) = C_1$ ($\psi(x, y) = C_2$) — общий интеграл уравнения $dy + \lambda_1 dx = 0$ ($dy + \lambda_2 dx = 0$), то $\xi = \varphi(x, y)$ ($\eta = \psi(x, y)$) есть нетривиальное частное решение уравнения $\xi_x - \lambda_1 \xi_y = 0$ ($\eta_x - \lambda_2 \eta_y = 0$). Из известных теорем теории ОДУ следует существование общих интегралов $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$ соответствующих уравнений в окрестности точки гиперболического типа (благодаря тому, что λ_1, λ_2 — функции класса C^1); кроме того, функции φ и ψ в этих интегралах имеют класс C^2 .

Уравнение характеристик

Умножим формально уравнения $dy + \lambda_j dx = 0, j = 1, 2$, друг на друга и на коэффициент a : $a(dy + \lambda_1 dx)(dy + \lambda_2 dx) = 0$ или

$$a(dy)^2 + a(\lambda_1 + \lambda_2)dydx + a\lambda_1\lambda_2(dx)^2 = 0.$$

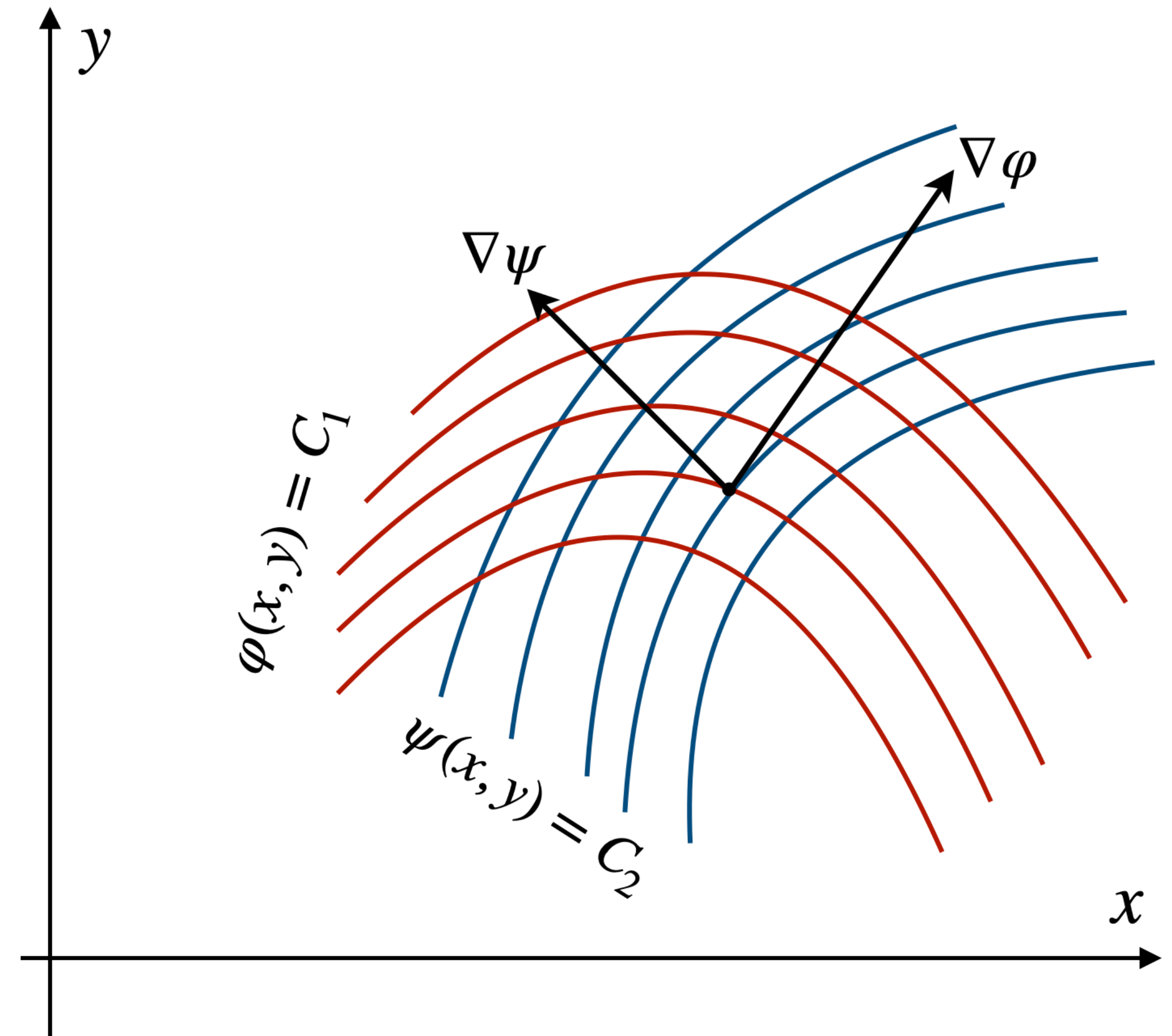
С учётом того, что λ_1, λ_2 — корни уравнения (1.14), получим уравнение

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dydx + c(x, y)(dx)^2 = 0. \quad (1.15)$$

Определение 1.3. Уравнение (1.15) называется *уравнением характеристик* для уравнения (1.10). Интегральная кривая уравнения (1.15) называется *характеристикой*.

Пара трансверсальных семейств характеристик

Таким образом,
уравнение (1.10) имеет в
окрестности точки
гиперболического
типа два трансверсальных
семейства характеристик
 $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ (см. рис.).
Действительно, из $b^2 - ac > 0$
следует, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, поэтому
градиенты функций φ и ψ
независимы.



Канонический вид уравнения гиперболического типа

Отсюда уже следует невырожденность замены $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Итак, $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = 0$, из трансверсальности также следует, что $\tilde{b} \neq 0$. Указанная замена приводит уравнение (1.10) в окрестности точки гиперболического типа к виду $2\tilde{b}u_{\xi\eta} + \dots = 0$, а после сокращения на $2\tilde{b}$ получается второй канонический вид. Подведём итоги в теореме.

Теорема 1.1. Пусть $b^2 - ac > 0$ в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$, тогда уравнение (1.10) имеет гиперболический тип и существует невырожденная C^2 -замена, приводящая уравнение в некоторой окрестности указанной точки ко второму каноническому виду $u_{\xi\eta} + \dots = 0$.

Параболический тип

Предположим, что $b^2 - ac = 0$ в окрестности точки, где уравнение (1.10) имеет параболический тип. При этом $a + c \neq 0$ в этой окрестности, т.е. не происходит вырождения порядка. Уравнение характеристик (1.15), имеющее кратный корень, можно представить в виде $(Pdx - Qdy)^2 = 0$.

Уравнение параболического типа имеет одно семейство характеристик $\varphi(x, y) = C_1$ — интеграл уравнения $Pdx - Qdy = 0$ (заметим, что $|P| + |Q| > 0$ в окрестности параболического типа), но для замены нужна ещё какая-нибудь C^2 -функция, причём такая, что якобиан замены $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ не равен нулю.

Вторая функция

Такая функция ψ на самом деле существует. Уточним, во-первых, связь уравнения характеристик (1.15) с уравнением $(Pdx - Qdy)^2 = 0$. Раскрывая скобки, получим

$$P^2 dx^2 - 2PQ dx dy + Q^2 dy^2 = 0. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) связано с уравнением характеристик множителем $\mu \neq 0$ в окрестности параболического типа: $Q^2 = \mu a$, $P^2 = \mu c$, $PQ = \mu b$. Дифференциальному уравнению $Pdx - Qdy = 0$ соответствует векторное поле $Q\vec{e}_x + P\vec{e}_y$. Рассмотрим ортогональное ему векторное поле $-P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y$; тогда общий интеграл $\psi(x, y) = C_2$ уравнения $Qdx + Pdy = 0$ даст требуемую функцию ψ (напомним, что независимость градиентов есть геометрическое выражение невырожденности замены).

Канонический вид уравнения параболического типа

Получим теперь канонический вид, предполагая невырожденность замены $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ (функция ψ не обязательно построена указанным выше способом). Так как $\varphi(x, y) = C_1$ — интеграл уравнения характеристик, то $Q\varphi_x + P\varphi_y = 0$. Имеем

$$\mu\tilde{a} = Q^2\varphi_x^2 + 2PQ\varphi_x\varphi_y + P^2\varphi_y^2 = (Q\varphi_x + P\varphi_y)^2 = 0,$$

$$\mu\tilde{b} = Q^2\varphi_x\psi_x + QP(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + P^2\varphi_y\psi_y = (\psi_xQ + \psi_yP)(Q\varphi_x + P\varphi_y) = 0.$$

Однако $\tilde{c} = \frac{1}{\mu}(Q\psi_x + P\psi_y)^2 \neq 0$, потому что иначе $\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = 0$, следовательно,

преобразованное уравнение есть $\tilde{c}u_{\eta\eta} + \dots = 0$, и после сокращения на $\tilde{c}$ получаем канонический вид параболического типа.

Теорема 1.2. Пусть $b^2 - ac = 0$ и $a + c \neq 0$ в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$, тогда уравнение (1.10) имеет параболический тип в этой окрестности и существует невырожденная S^2 -замена, приводящая уравнение (1.10) к каноническому виду $u_{\eta\eta} + \dots = 0$.

Эллиптический тип

Если $b^2 - ac < 0$, то уравнение (1.14) имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Легко видеть, что в этом случае $a \neq 0$ и $c \neq 0$. Уравнение (1.15) можно факторизовать, используя комплекснозначные функции:

$$a (dy + \lambda dx) (dy + \bar{\lambda} dx) = 0.$$

Для поиска замены, приводящей уравнение эллиптического типа к каноническому виду, нужно, во-первых, понять, что такое общий интеграл уравнения $dy + \lambda dx = 0$ с функцией $\lambda = \alpha + i\beta$, принимающей комплексные значения. Рассмотрим выражение $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$, где φ , ψ — вещественнозначные функции (действительная и мнимая часть будущего комплексного общего интеграла), и возьмём от него дифференциал:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy = 0.$$

Комплексный общий интеграл

Объединим последнее уравнение с уравнением $dy + \lambda dx = 0$ в систему

$$\begin{cases} (\alpha + i\beta)dx + dy = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Система (1.17) называется *системой Пфаффа*. Пфаффовы системы включают в себя не алгебраические или дифференциальные уравнения, но уравнения с дифференциальными формами. Легко видеть, что система (1.17) имеет нетривиальные относительно dx , dy решения тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha + i\beta & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Комплексный общий интеграл

Раскрывая этот определитель, приравнивая отдельно действительную часть и мнимую часть к нулю, получим систему двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями φ, ψ :

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Определение 1.2. Соотношение $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C$ есть комплексный общий интеграл уравнения $dy + (\alpha + i\beta)dx = 0$, если функции φ и ψ удовлетворяют системе (1.18) и $\left(\varphi_y\right)^2 + \left(\psi_y\right)^2 \neq 0$.

Канонический вид уравнения эллиптического типа: эффективность замены

Проверим, что замена $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, удовлетворяющая определению 1.2, невырождена и приводит уравнение (1.10) к каноническому виду в окрестности точки эллиптического типа.

Заметим, что $\alpha = -\frac{b}{a}$, $\beta^2 = \frac{ca - b^2}{a^2}$, поскольку λ , $\bar{\lambda}$ — корни уравнения (1.14); выразим производные по переменной x из системы (1.18): $\varphi_x = \alpha\varphi_y - \beta\psi_y$, $\psi_x = \alpha\psi_y + \beta\varphi_y$. Сначала проверим коэффициент $\tilde{b}$:

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= a(\alpha\varphi_y - \beta\psi_y)(\alpha\psi_y + \beta\varphi_y) + b(\alpha\varphi_y - \beta\psi_y)\psi_y + b(\alpha\psi_y + \beta\varphi_y)\varphi_y + c\varphi_y\psi_y = \\ &= \beta(a\alpha + b)\varphi_y^2 + \beta(-a\alpha - b)\psi_y^2 + (a\alpha^2 - a\beta^2 + 2b\alpha + c)\varphi_y\psi_y = 0.\end{aligned}$$

Канонический вид уравнения эллиптического типа: эффективность замены

Следом проверим разность $\tilde{a} - \tilde{c}$:

$$\begin{aligned}\tilde{a} - \tilde{c} &= a \left(\alpha \varphi_y - \beta \psi_y \right)^2 + 2b \left(\alpha \varphi_y - \beta \psi_y \right) \varphi_y + c \varphi_y^2 - a \left(\alpha \psi_y + \beta \varphi_y \right)^2 - \\ &- 2b \left(\alpha \psi_y + \beta \varphi_y \right) \psi_y - c \psi_y^2 = (a\alpha^2 + 2b\alpha + c - a\beta^2) \varphi_y^2 + (a\beta^2 - a\alpha^2 - \\ &- 2b\alpha - c) \psi_y^2 + (-2a\alpha - 2b\beta - 2a\alpha\beta - 2b\beta) \varphi_y \psi_y = 0.\end{aligned}$$

Все коэффициенты оказались равны нулю, покажем на примере коэффициента при φ_y^2 :

$$a\alpha^2 + 2b\alpha + c - a\beta^2 = a \frac{b^2}{a^2} - 2b \frac{b}{a} + c - a \frac{ca - b^2}{a^2} = \frac{b^2 - 2b^2 + ac - ca + b^2}{a} = 0.$$

Канонический вид уравнения эллиптического типа: теорема

Проверим невырожденность замены с функциями φ, ψ , удовлетворяющие определению 1.2:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\varphi_y - \beta\psi_y & \varphi_y \\ \alpha\psi_y + \beta\varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\beta\psi_y & \beta\varphi_y \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} = -\beta(\psi_y^2 + \varphi_y^2) \neq 0.$$

Теорема 1.3. Пусть $b^2 - ac < 0$ в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$, тогда уравнение (1.10) имеет эллиптический тип. Если существует комплексный общий интеграл уравнения характеристик (1.15), удовлетворяющий определению 1.2, то существует невырожденная C^2 -замена, приводящая уравнение (1.10) в окрестности указанной точки к каноническому виду $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = 0$.

Содержание

1. Введение. Классификация уравнений
2. Приведение 2D полулинейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду
3. Инвариантные преобразования двумерного уравнения Лапласа

Преобразование уравнения Лапласа

Рассмотрим C^2 -диффеоморфизм областей Ω и Q :
 $\Omega \ni (x, y) \mapsto (\xi, \eta) \in Q$. Выясним, как преобразуется уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в области Ω при замене $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$. Общий вид преобразованного уравнения Лапласа:

$$\tilde{a}u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\eta\eta} + u_{\xi}(\xi_{xx} + \xi_{yy}) + u_{\eta}(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0, \quad (1.19)$$

где $\tilde{a} = \xi_x^2 + \xi_y^2$, $\tilde{c} = \eta_x^2 + \eta_y^2$, $\tilde{b} = \xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y$. Когда уравнение (1.19) есть уравнение Лапласа в области Q ?

Конформные преобразования

Условие $\tilde{b} = 0$ эквивалентно соотношению

$$\begin{vmatrix} \xi_x & -\xi_y \\ \eta_y & \eta_x \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует $\xi_x = k\eta_y$, $\xi_y = -k\eta_x$. Но тогда соотношение $\tilde{a} = \tilde{c}$ равносильно тому, что $k^2 = 1$. При $k = 1$ рассматриваемый диффеоморфизм — конформный изоморфизм областей Ω и Q первого рода, при $k = -1$ — конформный изоморфизм второго рода. В обоих случаях $\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0$, $\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$.

Связь с голоморфными функциями

Итак, конформные изоморфизмы и только они сохраняют уравнение Лапласа. Если $\Omega = Q$, то их множество образует группу (относительно композиции) конформных автоморфизмов $\text{Conf}(\Omega)$. У последней есть подгруппа конформных автоморфизмов первого рода. Они, как известно из ТФКП, связаны с голоморфными (аналитическими) функциями. А именно, если стандартным образом отождествить $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, то конформный изоморфизм первого рода есть голоморфная функция $f: \Omega \rightarrow Q$, причём $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \Omega$. И наоборот, если $f: \Omega \rightarrow Q$ — голоморфная функция, имеющая обратную голоморфную функцию, то $\xi = \text{Re} f(x + iy)$, $\eta = \text{Im} f(x + iy)$, $z = x + iy$ — конформный изоморфизм первого рода.

Уравнение Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

В евклидовых пространствах размерности три и больше ситуация аналогичная: конформные изоморфизмы и только они есть инвариантные преобразования уравнения Лапласа. Проблема в том, что конформных отображений в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) мало: все они по теореме Лиувилля представляют собой композиции сдвигов, ортогональных преобразований, гомотетий, а также инверсий (см. вторую тему). Тем не менее, их достаточно, чтобы получить *формулу Пуассона*. Она даёт решение уравнения Лапласа в шаре с известными значениями неизвестной функции на граничной сфере, т.е. решение задачи Дирихле.