

Уравнения в частных производных
Задача Коши для эволюционных
уравнений

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

<https://baikov.org/pde>

Содержание

- 1. Задача Гурса и её разрешимость**
2. Функция Римана 2D гиперболического оператора
3. Задача Коши для 2D гиперболического уравнения
4. Задача Коши для волнового уравнения: классические и обобщённые решения
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

2D линейные операторы второго порядка

Рассмотрим в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ функции A, B, C, a, b, c и линейный оператор второго порядка, имеющий вид

$$\mathcal{L}u = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + au_x + bu_y + cu, \quad (5.1)$$

и соответствующее уравнение

$$\mathcal{L}u = F(x, y). \quad (5.2)$$

Когда оператор (5.1) и уравнение (5.2) имеют гиперболический тип? Для определения типа и последующего приведения к каноническому виду рассмотрим уравнение характеристик

$$A dy^2 - 2B dy dx + C dx^2 = 0. \quad (5.3)$$

Канонический вид 2D гиперболического уравнения второго порядка

Оператор (5.1) (уравнение (5.2)) имеет 1) *эллиптический тип*, если $B^2 - AC < 0$; 2) *параболический тип*, если $B^2 - AC = 0$, $A + C \neq 0$; 3) *гиперболический тип*, если $B^2 - AC > 0$. В окрестности точки гиперболического типа существует C^2 -диффеоморфная замена независимых переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, приводящая уравнение (5.2) к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + \tilde{a}u_{\xi} + \tilde{b}u_{\eta} + \tilde{c}u = \tilde{f}(\xi, \eta).$$

Будем считать в пп. 1—3, что такая замена сделана с самого начала, и в операторе (5.1) (уравнении (5.2)) $A = 0$, $2B = 1$, $C = 0$.

Волновой оператор и волновое уравнение

Частным случаем уравнения (5.2) служит *волновое уравнение* с одной пространственной переменной x :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (5.4)$$

где t — переменная времени, $0 < a = \text{const}$ — скорость распространения волн. Уравнение (5.4) имеет обобщение для случая двух, трёх и т.д. пространственных переменных. Волновой оператор

(оператор Д'Аламбера) $\square_a u = u_{tt} - a^2 \Delta u$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$

— оператор Лапласа относительно пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$, $\square_a u = f(x, t)$ — волновое уравнение.

Постановка задачи Гурса

Пусть $\mathcal{L}u = u_{xy} + au_x + bu_y + cu$ — гиперболический оператор в каноническом виде, $a, b, c \in C(\Omega)$ — известные функции.

Пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$, I — промежуток на оси Ox , содержащий точку x_0 , J — промежуток на оси Oy , содержащий y_0 ,

$D = I \times J \subset \Omega$. Задача Гурса в D имеет вид

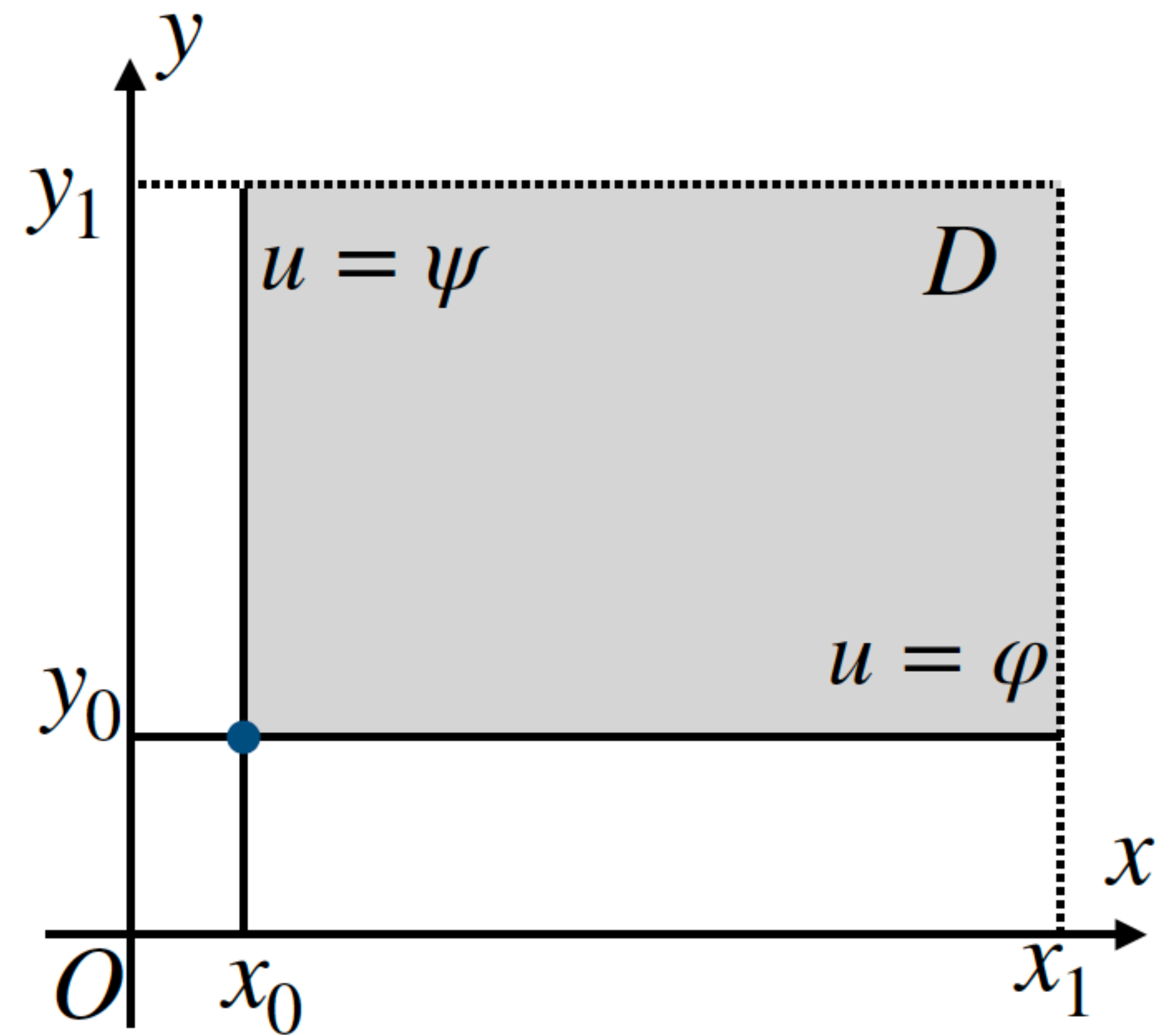
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, y), (x, y) \in D, \\ u|_{y=y_0} = \varphi(x), u|_{x=x_0} = \psi(y), \end{cases} \quad (5.5)$$

где f — известная функция в D , φ — известная функция на I , ψ — известная функция на J .

Классическое решение. Необходимые условия существования

Далее предположим, что $I = (x_0, x_1)$, $J = (y_0, y_1)$, так что D — прямоугольник. Классическим решением задачи Гурса (6.5) называется функция $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющая условиям Гурса и уравнению $\mathcal{L}u = f$ в D . Необходимые условия существования:

- $f \in C(D)$, $\varphi \in C(\bar{I})$, $\psi \in C(\bar{J})$;
- $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ — условие согласования.



Задача Гурса: преобразование к системе интегральных уравнений

Пусть $v_y = u_{xy}$, $w_x = u_{yx}$, заменим в уравнении $\mathcal{L}u = f$ переменную x на s и проинтегрируем его по s от x_0 до x :

$$\int_{x_0}^x u_{sy} ds = - \int_{x_0}^x a(s, y) u_s ds - \int_{x_0}^x b(s, y) u_y ds - \int_{x_0}^x c(s, y) u ds + \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$
$$\Rightarrow w(x, y) - w(x_0, y) = - \int_{x_0}^x a(s, y) v(s, y) ds - \int_{x_0}^x b(s, y) w(s, y) ds -$$
$$- \int_{x_0}^x c(s, y) u(s, y) ds + \int_{x_0}^x f(s, y) ds. \text{ Но } w(x_0, y) = u_y(x_0, y) = \psi'(y),$$

Задача Гурса: преобразование к системе интегральных уравнений

поэтому интегральное уравнение для w есть

$$w(x, y) = - \int_{x_0}^x a(s, y) v(s, y) ds - \int_{x_0}^x b(s, y) w(s, y) ds - \\ - \int_{x_0}^x c(s, y) u(s, y) ds + \psi'(y) + \int_{x_0}^x f(s, y) ds. \quad (5.6)$$

Рассуждая аналогично, можно получить уравнение для v :

$$v(x, y) = - \int_{y_0}^y a(x, t) v(x, t) dt - \int_{y_0}^y b(x, t) w(x, t) dt - \\ - \int_{y_0}^y c(x, t) u(x, t) dt + \varphi'(x) + \int_{y_0}^y f(x, t) dt. \quad (5.7)$$



Édouard Jean-Baptiste
Goursat (1858 — 1936)

Задача Гурса: преобразование к системе интегральных уравнений

Кроме того,

$$u(x, y) = u(x_0, y) + \int_{x_0}^x u_s(s, y) ds = \psi(y) + \int_{x_0}^x v(s, y) ds,$$

а также

$$u(x, y) = u(x, y_0) + \int_{y_0}^y u_t(x, t) dt = \varphi(x) + \int_{y_0}^y w(x, t) dt. \quad (5.8)$$

Оставим одно из этих уравнений, например уравнение (5.8), и получим систему (5.8), (5.7) и (5.6) интегральных уравнений относительно функций u , v и w .

Эквивалентность задачи Гурса и системы интегральных уравнений

Утверждение 5.1. Пусть $\varphi \in C^2(\bar{I})$, $\psi \in C^2(\bar{J})$, $f \in C^1(\bar{D})$ выполнено условие согласования $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$. Тогда любое решение $u, v, w \in C(\bar{D})$ системы (5.6)–(5.8) даёт решение $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ задачи Гурса (5.5).

Доказательство. Нетрудно видеть, что при таких φ, ψ и f функция $u \in C^2(D)$. Условие Гурса $u(x, y_0) = \varphi(x)$ немедленно вытекает из уравнения (5.8). Из него же следует, что $w(x, t) = u_y(x, t)$. Дифференцируем уравнение (5.6) по x :

$$w_x = -a(x, y)v - b(x, y)w - c(x, y)u + f(x, y).$$

Эквивалентность задачи Гурса и системы интегральных уравнений

Дифференцируем уравнение (5.7) по y :

$$v_y = -a(x, y)v - b(x, y)w - c(x, y)u + f(x, y).$$

Отсюда, $v_y = w_x \Rightarrow v(x, y) = v(x, y_0) + \int_{y_0}^y w_x(x, t)dt = \varphi'(x) +$
 $+ \int_{y_0}^y u_{xt}(x, t)dt = \varphi'(x) + u_x(x, y) - u_x(x, y_0) = u_x(x, y)$. Отсюда

$u_{xy} = -a(x, y)u_x - b(x, y)u_y - c(x, y)u + f(x, y)$. Интегрируем уравнение $u_y(x_0, y) = w(x_0, y)$: $u(x_0, y) - \varphi(x_0) = \psi(y) - \psi(y_0) \Rightarrow u(x_0, y) = \psi(y)$, что и требовалось.

Операторное уравнение

Рассмотрим пространство

$$C(\bar{D})^3 = \left\{ \mathbf{U} = (u, v, w)^T : u, v, w \in C(\bar{D}) \right\}$$

с нормой $\|\mathbf{U}\| = \|u\|_{C(\bar{D})} + \|v\|_{C(\bar{D})} + \|w\|_{C(\bar{D})}$, и оператор Гурса в этом пространстве $G : C(\bar{D})^3 \rightarrow C(\bar{D})^3$, действующий на вектор-функцию $\mathbf{U} = (u, v, w)^T \in C(\bar{D})^3$ по формуле

$$GU_1(x, y) = \int_{y_0}^y w(x, t) dt, \quad GU_2(x, y) = - \int_{y_0}^y c(x, t) u(x, t) dt - \int_{y_0}^y a(x, t) v(x, t) dt - \int_{y_0}^y b(x, t) w(x, t) dt,$$
$$GU_3(x, y) = - \int_{x_0}^x c(s, y) u(s, y) ds - \int_{x_0}^x a(s, y) v(s, y) ds - \int_{x_0}^x b(s, y) w(s, y) ds.$$

Операторное уравнение. Метод Пикара

Введём ещё известную вектор-функцию $\Phi \in C(\overline{D})^3$

$$\Phi(x, y) = \left(\varphi(x), \varphi'(x) + \int_{y_0}^y f(x, t) dt, \psi'(y) + \int_{x_0}^x f(s, y) ds \right)^T.$$

Тогда интегральную систему (5.6)—(5.8) можно переписать в виде *операторного уравнения*

$$\mathbf{U} = G\mathbf{U} + \Phi. \quad (5.9)$$

Организуем итерационный процесс — метод Пикара построения решения уравнения (5.9):

- за *нулевое приближение* примем $\mathbf{U}^0 = \Phi$;

Метод Пикара и его сходимость

- полагаем $U^k = GU^{k-1} + \Phi$, $k = 1, 2, \dots$
Получается последовательность $\{U^k\}_{k=0}^{\infty}$
пикаровских приближений. Главный
вопрос: сходится ли последовательность
Пикара?

Определение 5.1. Пусть N —
нормированное пространство. Линейный
оператор $A : N \rightarrow N$ называется
ограниченным, если существует $C \geq 0$ и
для всех $u \in N$ $\|Au\| \leq C\|u\|$.



Charles Émile Picard
(1856 — 1941)

Норма оператора. Сжимающие операторы

- Нетрудно показать, что ограниченность оператора и непрерывность (по Коши или Гейне) эквивалентны.
- *Нормой* ограниченного оператора $A : N \rightarrow N$ называется наименьшая константа C из определения 5.1. Другими словами, $\|A\| = \sup \{ \|Au\| : u \in N, \|u\| \leq 1 \}$.
- Линейный ограниченный оператор $A : N \rightarrow N$ называется *сжимающим*, если $\|A\| < 1$.

Вернёмся к операторному уравнению (5.9), немного перепишем его:

$$(I - G)U = \Phi. \quad (5.10)$$

Геометрическая прогрессия

Здесь I — тождественный оператор. Предположим, что оператор $I - G$ имеет обратный и уравнение (5.10) можно разрешить: $U = (I - G)^{-1}\Phi$. Но $(I - G)^{-1}$ можно разложить по степеням G как геометрическую прогрессию:

$$(I - G)^{-1} = I + G + G^2 + G^3 + \dots \quad (5.11)$$

Когда сходится ряд (5.11)? По аналогии с разложением функции комплексной переменной $\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ в ряд по степеням z , ряд (5.11) должен сходиться $\Leftrightarrow \|G\| < 1$ (оператор G сжимающий).

Теорема об эквilibриуме

Теорема 5.1. Пусть оператор Гурса G сжимающий: $\|G\| < 1$. Тогда для любой вектор-функции $\Phi \in C(\bar{D})^3$ последовательность Пикара сходится в смысле нормы пространства $C(\bar{D})^3$ к единственному решению (эквilibриуму) операторного уравнения (5.9).

Замечания:

- важно, что пространство $C(\bar{D})^3$ полное;
- если оператор G сжимающий, то определён разрешающий линейный ограниченный оператор $(I - G)^{-1}$.

Оценка нормы оператора Гурса

Оценим норму оператора Гурса, для чего рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{U} = (u, v, w)^T \in C(\bar{D})^3$ с $\|\mathbf{U}\| = \|u\|_{C(\bar{D})} + \|v\|_{C(\bar{D})} + \|w\|_{C(\bar{D})} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|G\mathbf{U}_1\|_{C(\bar{D})} &= \max_{(x,y)^T \in \bar{D}} \left| \int_{y_0}^y w(x, t) dt \right| \leq \max_{(x,y)^T \in \bar{D}} \int_{y_0}^y |w(x, t)| dt = \\ &= \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \int_{y_0}^{y_1} |w(x, t)| dt \leq \int_{y_0}^{y_1} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |w(x, t)| dt \leq \\ &\leq (y_1 - y_0) \max_{(x,t)^T \in \bar{D}} |w(x, t)| = (y_1 - y_0) \|w\|_{C(\bar{D})}; \end{aligned}$$

Оценка нормы оператора Гурса

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \|G\mathbf{U}_2\|_{C(\overline{D})} &= \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| -\int_{y_0}^y c(x,t)u(x,t)dt - \int_{y_0}^y a(x,t)v(x,t)dt - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{y_0}^y b(x,t)w(x,t)dt \right| \leq \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| \int_{y_0}^y c(x,t)u(x,t)dt \right| + \\
 &\quad + \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| \int_{y_0}^y a(x,t)v(x,t)dt \right| + \max_{(x,y)^T \in \overline{D}} \left| \int_{y_0}^y b(x,t)w(x,t)dt \right| \leq \\
 &\leq (y_1 - y_0) \left(\|c\|_{C(\overline{D})} \|u\|_{C(\overline{D})} + \|a\|_{C(\overline{D})} \|v\|_{C(\overline{D})} + \|b\|_{C(\overline{D})} \|w\|_{C(\overline{D})} \right);
 \end{aligned}$$

Оценка нормы оператора Гурса

- Рассуждая аналогично, получим $\|G\mathbf{U}_3\|_{C(\overline{D})} \leqslant$
 $\leqslant (x_1 - x_0) \left(\|c\|_{C(\overline{D})} \|u\|_{C(\overline{D})} + \|a\|_{C(\overline{D})} \|v\|_{C(\overline{D})} + \|b\|_{C(\overline{D})} \|w\|_{C(\overline{D})} \right).$

Отсюда получаем оценку

$$\|G\mathbf{U}\|_{C(\overline{D})}^3 \leqslant \left(\left(1 + \|b\|_{C(\overline{D})} \right) (y_1 - y_0) + (x_1 - x_0) \|b\|_{C(\overline{D})} \right) \|w\|_{C(\overline{D})} +$$
$$+ (x_1 - x_0 + y_1 - y_0) \|a\|_{C(\overline{D})} \|v\|_{C(\overline{D})} + (x_1 - x_0 + y_1 - y_0) \|c\|_{C(\overline{D})} \|u\|_{C(\overline{D})}.$$

Отсюда, $\|G\| \leqslant \max \left\{ (x_1 - x_0 + y_1 - y_0) \|c\|_{C(\overline{D})}, (x_1 - x_0 + y_1 - y_0) \|a\|_{C(\overline{D})}, \right.$
 $\left. \left(1 + \|b\|_{C(\overline{D})} \right) (y_1 - y_0) + (x_1 - x_0) \|b\|_{C(\overline{D})} \right\}.$ Если этот максимум

меньше единицы, то по теореме 5.1 уравнение 5.9 имеет решение.

Локальный результат недостаточен

А если выполнены условия утверждения 5.1, то задача Гурса (5.5) имеет решение в случае, если оператор Гурса сжимающий.

Итак, $\|G\| < 1$, если прямоугольник D достаточно мал. Однако, локального результата для наших целей будет недостаточно.

локальная разрешимость $\Rightarrow$ глобальная разрешимость

Вспомним, как происходит глобализация разрешимости для линейных систем ОДУ. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), x(0) = x^0, \quad (5.12)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A = A(t)$ — квадратная матрица порядка n с непрерывными коэффициентами, которые определены на интервале $(T_0, T_1) \ni 0$,

$$f \in C(T_0, T_1)^n.$$

Задача Коши для линейной системы ОДУ

Задача (5.12) эквивалентна интегральному уравнению вида

$$x(t) = \int_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)d\tau + x^0, t \in (t_0, t_1). \quad (5.13)$$

Решение $x \in C(T_0, T_1)^n$ интегрального уравнения (5.13) принадлежит пространству $C^1(T_0, T_1)^n$ и служит решением задачи Коши (5.12).

Оператор $C : C[0, T]^n \rightarrow C[0, T]^n$, где $0 < T < T_1$, действующий по

формуле $(Cx)(t) = \int_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau$ на векторные-функции $x \in C[0, T]^n$,

сжимающий, если $T \max_{0 \leq \tau \leq T} \|A(\tau)\| < 1$, где $\|A(\tau)\|$ — норма линейного

оператора $A(\tau) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Продолжение решение

Если величина $T \max_{0 \leq \tau \leq T} \|A(\tau)\| \geq 1$, то разобьём промежуток $[0, T]$ на такие части $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$, что для каждого $k = \overline{1, N}$ соответствующий оператор $(Cx)(t) = \int_{t_k}^t A(\tau)x(\tau)d\tau$ будет сжимающим в пространстве $C[t_{k-1}, t_k]^n$:
 $(t_k - t_{k-1}) \max_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k} \|A(\tau)\| < 1$. Тогда решение можно продолжить, следовательно, интегральное уравнение (5.13) и задача Коши (5.12) имеют единственное решение на любом промежутке $[0, T]$, $T < T_1$ (на промежутке $[\tilde{T}_0, T_1] \subset (T_0, T_1)$).

Глобальная разрешимость задачи Гурса

Теорема 5.2. Пусть в задаче Гурса (5.5), заданной в прямоугольнике $D = I \times J$, где $I = (x_0, x_1)$, $J = (y_0, y_1)$, $\varphi \in C^2(\bar{I})$, $\psi \in C^2(\bar{J})$, $f \in C^1(\bar{D})$ и выполнено условие согласования $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$. Тогда она имеет единственное решение $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

Доказательство. 1) Задача Гурса (5.5) эквивалентна системе интегральных уравнений (5.6)—(5.8).

2) Разобьём прямоугольник D на конечное число маленьких прямоугольников, в которых оператор Гурса сжимающий.

3) Продолжим решение из левого нижнего прямоугольника в прямоугольник D .

Содержание

1. Задача Гурса и её разрешимость
- 2. Функция Римана 2D гиперболического оператора**
3. Задача Коши для 2D гиперболического уравнения
4. Задача Коши для волнового уравнения: классические и обобщённые решения
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Формально сопряжённый оператор

Формально сопряжённый оператор к оператору

$$\mathcal{L}u = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$$

имеет вид

$$\mathcal{L}^*v = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (a(x, y)v) - \frac{\partial}{\partial y} (b(x, y)v) + c(x, y)v.$$

Определение: для любой $u \in C^2(\Omega)$ и любой $v \in C_0^2(\Omega)$

$$\int_D (\mathcal{L}u)v dx = \int_D u \mathcal{L}^*v dx.$$

Формально сопряжённый оператор определён, если коэффициенты $a, b \in C^1(\Omega)$.

Функция Римана

Определение 5.2. Функцией Римана оператора $\mathcal{L}$ в прямоугольной области $D = I \times J$, I, J — промежутки, называется функция $R = R(s, y, x, y)$, $(s, t), (x, y) \in D$, удовлетворяющая для любой точки $(x, y) \in D$ специальной задаче Гурса.

Условия Гурса в задаче (5.14) означают что $R_s - b(s, y)R = 0$, $R_t - a(x, t)R = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{s,t}^* R = 0, (s, t) \in D, \\ R|_{s=x} = \exp \int_y^t a(x, \theta) d\theta, \\ R|_{t=y} = \exp \int_x^s b(\theta, y) d\theta. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Существование и единственность функции Римана

Утверждение 5.2. Пусть $a, b \in C^1(D)$, $c \in C(D)$, тогда оператор $\mathcal{L}u = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$ имеет единственную функцию Римана в области D .

Доказательство. Действительно, поскольку условия Гурса задачи (5.14) удовлетворяет условию согласования, то для последней выполнены условия теоремы 5.2, которая и даёт единственную функцию Римана.

Функция Римана формально сопряжённого оператора

По определению функция Римана $R^* = R^*(s, t, x, y)$ формально сопряжённого оператора удовлетворяет задаче

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{s,t} R^* = 0, (s, t) \in D, \\ R|_{s=x} = \exp \int_y^t -a(x, \theta) d\theta, \\ R|_{t=y} = \exp \int_x^s -b(\theta, y) d\theta. \end{array} \right.$$

Из формулы Римана (см. далее) следует, что

$R^*(s, t; x, y) = R(x, y; s, t)$ (теорема о симметрии функции Римана).

$R(x, y, x, y) = 1$.

Классическая формула Грина

Пусть C — замкнутая жорданова кривая (замкнутая кусочно-гладкая кривая, не пересекающая саму себя). По теореме Жордана она ограничивает область $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Для функций $P, Q \in C^1(\overline{\Omega})$ верная классическая формула Грина

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dxdy.$$

Пусть теперь $\mathcal{L}$ — гиперболический оператор (7), $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$.

Формула Римана

Имеет место формула Римана

$$\iint_{\Omega} (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v) dx dy = \oint_{C=\partial\Omega} Pdx + Qdy,$$

где

$$P = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b(x, y)uv,$$
$$Q = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a(x, y)uv.$$

Формула Римана непосредственно следует из формулы Грина, если предположить, что $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$, что всегда так.

Интегральное представление решение задачи Гурса

Пусть D — прямоугольная область. Рассмотрим задачу Гурса для гиперболического оператора:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{s,t}u = f(s, t), (s, t) \in D', \\ u|_{s=x_0} = \psi(t), \\ u|_{t=y_0} = \varphi(s), \end{cases}$$

где точка $(x_0, y_0) \in D$ и далее фиксирована, $f \in C(\overline{D}')$, $D' = (x_0, x_1) \times (y_0, y_1) \Subset D$, $\varphi, \psi \in C^2$, $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$. По теореме задача Гурса имеет единственное решение $u \in C^2(D')$. Получим интегральную формула для решения задачи Гурса.

Интегральное представление решение задачи Гурса

Пусть, для определённости, $(x, y) \in D$, $x_1 > x > x_0$, $y_1 > y > y_0$. Рассмотрим прямоугольник $\Omega = (x_0, x) \times (y_0, y)$ и ориентируем его границу согласованным образом (против часовой стрелки). Применим для функций $u = u(s, t)$ — решения задачи Гурса — и $R = R(s, t, x, y)$ — функция Римана оператора задачи — формулу Римана:

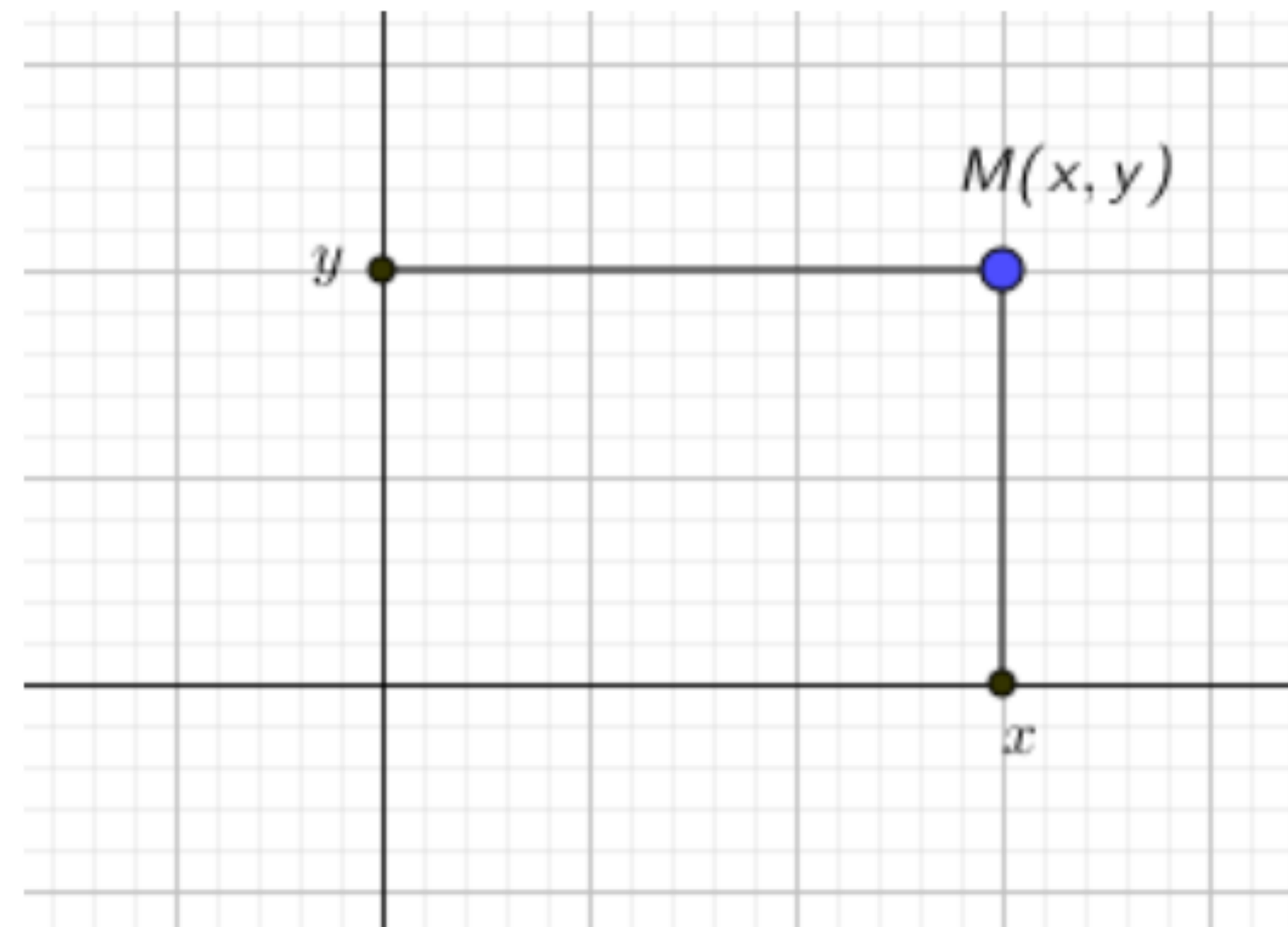
$$\iint_{\Omega} (v \mathcal{L} u - u \mathcal{L}^* v) dx dy = \oint_{C=\partial\Omega} P dx + Q dy$$

$$\iint_{\Omega} R(s, t, x, y) f(s, t) ds dt = \oint_C P ds + Q dt.$$

Интегральное представление решение задачи Гурса

Рассмотрим интеграл по каждой стороне прямоугольника:

- $C_1 = \{x_0 \leq s \leq x, t = y_0\}$
- $C_2 = \{y_0 \leq t \leq y, s = x\}$
- $C_3 = \{x_0 \leq s \leq x, t = y\}$
- $C_4 = \{y_0 \leq t \leq y, s = x_0\}$



Интегральное представление решение задачи Гурса

- $C_1 = \{x_0 \leq s \leq x, t = y_0\}$:

$$\int_{x_0}^x P|_{t=y_0} ds = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{2} \varphi(s) \frac{\partial R}{\partial s} - \frac{1}{2} R \varphi'(s) - b \varphi(s) R \right) ds = \dots$$

- $C_2 = \{y_0 \leq t \leq y, s = x\}$:

$$\int_{y_0}^y Q|_{s=x} dt = \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{2} R u_t(x, t) - \frac{1}{2} u(x, t) \frac{\partial R}{\partial t} + a u(x, t) R \right) dt = \dots$$

Замечание: $P = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial R}{\partial s} - R \frac{\partial u}{\partial s} \right) - b(s, t) uv,$

$$Q = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + a(s, t) uv.$$

Интегральное представление решение задачи Гурса

- $C_3 = \{x_0 \leq s \leq x, t = y\}$:

$$\begin{aligned} - \int_{x_0}^x P \Big|_{t=y} ds &= - \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{2} u(s, y) \frac{\partial R}{\partial s} - \frac{1}{2} R u_s(s, y) - b u(s, y) R \right) ds = \\ &= - \left(\int_{x_0}^x \left(\frac{\partial R}{\partial s} - b R \right) u(s, y) ds - \frac{1}{2} R u(s, y) \Big|_{x_0}^x \right) = \\ &= \frac{1}{2} (R(x, y, x, y) u(x, y) - R(x_0, y, x, y) \psi(y)) \end{aligned}$$

- $C_4 = \{y_0 \leq t \leq y, s = x_0\}$:

$$- \int_{y_0}^y Q \Big|_{s=x_0} dt = - \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{2} R \psi'(t) - \frac{1}{2} \psi(t) \frac{\partial R}{\partial t} + a \psi(t) R \right) dt = \dots$$

Интегрируем по частям, упрощаем...

Интегральное представление решение задачи Гурса с однородными условиями

Рассмотрим, к примеру, задачу Гурса для неоднородного гиперболического уравнения с однородными условиями:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, y), (x, y) \in D, \\ u|_{y=y_0} = 0, u|_{x=x_0} = 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

где $D = (x_0, x_1) \times (y_0, y_1)$. Пусть $R = R(s, t, x, y)$ — функция Римана оператора $\mathcal{L}$ в прямоугольной области $\Omega \supset \bar{D}$. Тогда единственное решение задачи (5.15) представляется в виде

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(s, t, x, y) f(s, t) ds dt.$$

Содержание

1. Задача Гурса и её разрешимость
2. Функция Римана 2D гиперболического оператора
- 3. Задача Коши для 2D гиперболического уравнения**
4. Фундаментальное решение волнового оператора
5. Задача Коши для волнового уравнения: классические и обобщённые решения

Постановка задачи Коши

Пусть $\gamma = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y = \mu(x), x \in (x_1, x_2) \}$ — начальная кривая, представляющая собой график функции $\mu \in C^1(x_1, x_2)$,
 $\mathcal{L}u = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$ — линейный гиперболический 2D операторы второго порядка. Поставим задачу Коши для этого оператора:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, y), \\ u|_{\gamma} = u_0 \Leftrightarrow u(x, \mu(x)) = u_0(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}} \right|_{\gamma} = u_1 \Leftrightarrow \xi(x)u_x(x, \mu(x)) + \eta(x)u_y(x, \mu(x)) = u_1(x). \end{cases} \quad (5.16)$$

Условия трансверсальности

Здесь f — правая часть уравнения, u_0, u_1 — правые части начальных условий (начальные функции), $\vec{\tau} = \xi \vec{e}_x + \eta \vec{e}_y$ — поле направлений дифференцирования, заданное на кривой γ .

Первое условие трансверсальности: $\forall x \in (x_1, x_2) \exists \mu'(x) \neq 0$, $\mu'(x) \neq \infty$. Геометрический смысл — начальная кривая γ не касается характеристик.

Второе условие трансверсальности: поле направлений $\vec{\tau}$ не касается кривой γ , т.е. $\vec{\tau} \cdot \vec{\nu} = \eta(x) - \mu'(x)\xi(x) \neq 0$ для всех $x \in (x_1, x_2)$, где $\vec{\nu} = -\mu'(x)\vec{e}_x + \vec{e}_y$ — нормаль к γ .

Теорема о существовании и единственности

Если выполнены условия трансверсальности, то можно найти u_x и u_y на начальной кривой, решив систему уравнений

$$\begin{cases} u_x + \mu'(x)u_y = u'_0(x), \\ \xi(x)u_x + \eta(x)u_y = u_1(x). \end{cases} \quad (5.17)$$

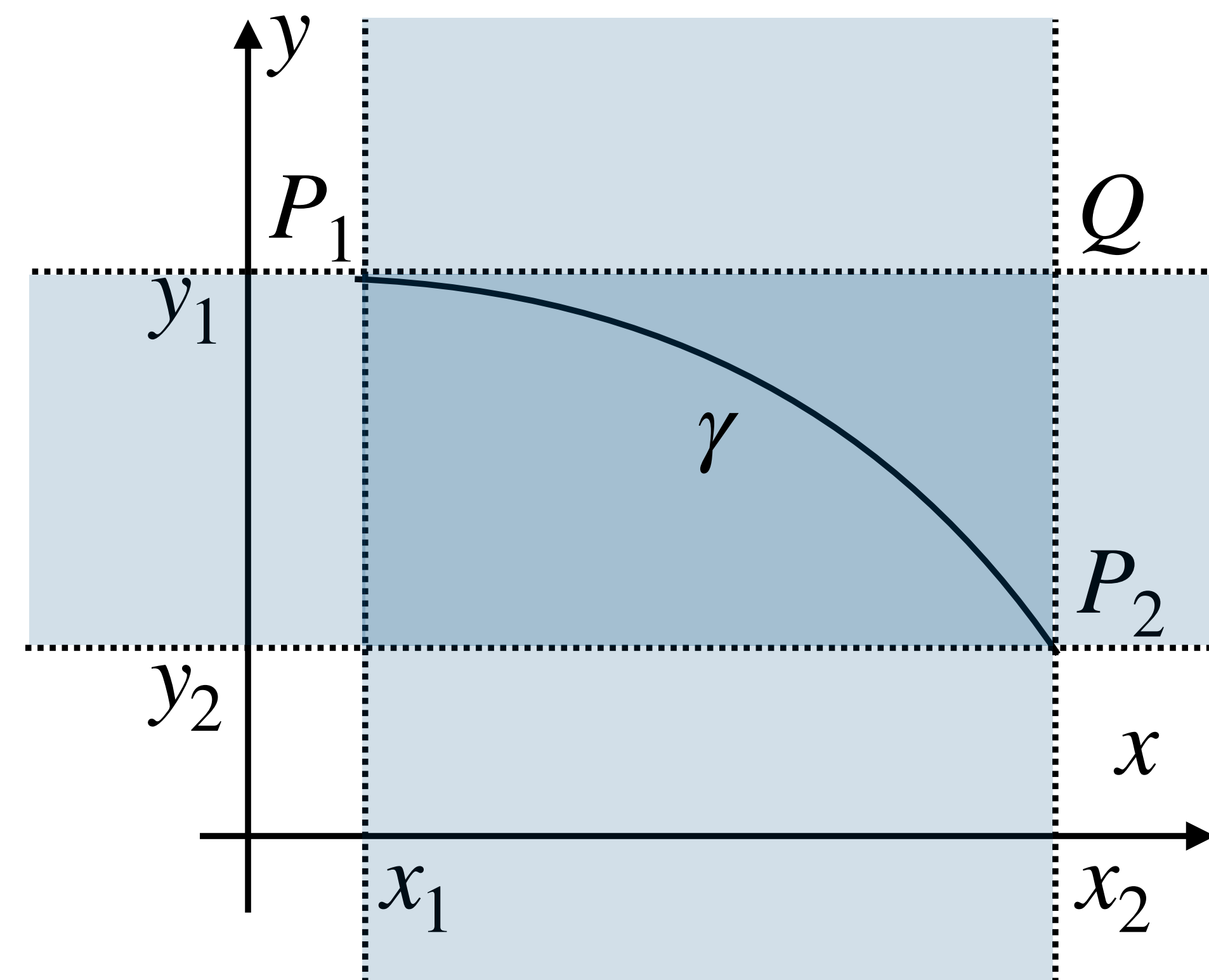
Действительно, определитель системы (5.17) есть $\eta(x) - \mu'(x)\xi(x) \neq 0 \Rightarrow u_x \Big|_{\gamma} = \varphi, u_y \Big|_{\gamma} = \psi$.

Теорема 5.3. Пусть $f \in C^1, u_0 \in C^2, u_1 \in C^1$ и на начальной кривой γ выполнены условия трансверсальности. Тогда в окрестности γ существует единственное классическое решение $u \in C^2$ задачи Коши (5.16).

Область единственности и область влияния

Проведём через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ характеристики — горизонтальные и вертикальные прямые.

Область единственности — это прямоугольник $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$. В этой области решение задачи Коши (5.16) существует и единственно.



Область влияния. Интегральная формула

Область влияния есть объединение вертикальной и горизонтальной полос, образованных характеристиками, проходящими через γ . Она включает в себя область единственности.

Как получить решение задачи в точке (x_2, y_1) ? Для этого необходимо применить формулу Римана к решению u задачи (5.16) и функции Римана в криволинейном треугольнике P_1QP_2 . Например, если $u_0 = 0, u_1 = 0$, то

$$u(x_2, y_1) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\mu(x)}^{y_1} R(x, y; x_1, y_2) f(x, y) dy. \quad (5.18)$$

Содержание

1. Задача Гурса и её разрешимость
2. Функция Римана 2D гиперболического оператора
3. Задача Коши для 2D гиперболического уравнения
- 4. Задача Коши для волнового уравнения: классические и обобщённые решения**
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Постановка задачи Коши для волнового уравнения

$\square_a u \equiv u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$ — волновое уравнение. Задача Коши для волнового уравнения имеет вид

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x). \end{cases} \quad (5.19)$$

Обозначение: $Q = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ — полупространство-время.

Определение 5.3. Классическим решением задачи Коши (5.19) называется функция $u \in C^2(\overline{Q})$, которая при подстановке обращает уравнение и начальные условия в тождества.

Единственность классического решения. Преобразование задачи Коши

Необходимое условие существования классического решения:
 $f \in C(\bar{Q}), u_0 \in C^2(\bar{Q}), u_1 \in C^1(\bar{Q})$.

Утверждение 5.3. Классическое решение задачи Коши (5.19) единственно.

В доказательстве используется *энергетическая оценка*.

Пусть $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n), u_1 \in C^1(\mathbb{R}^n), f \in C(\bar{Q})$. Рассмотрим продолжения $\tilde{u}(x, t) = u(x, t)\theta(t), \tilde{f}(x, t) = f(x, t)\theta(t)$ функций u, f в $\mathbb{R}^{n+1}$ нулем в область $\{t < 0\}$.

Преобразование задачи Коши к уравнению с обобщённой функцией в правой части

Утверждение 5.4. Пусть $u \in C^2(\overline{Q})$ — классическое решение задачи Коши (5.19). Тогда $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}_{tt} - a^2 \Delta \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t). \quad (5.20)$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда $(\tilde{u}_{tt} - a^2 \Delta \tilde{u}, \alpha(x, t)) = (\tilde{u}, \alpha_{tt} - a^2 \Delta \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0}$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) (\alpha_{tt} - a^2 \Delta \alpha) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x, t) (u_{tt} - a^2 \Delta u) dx - \right. \\ \left. - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{t=\varepsilon} u(x, \varepsilon) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=\varepsilon} dx \right] = \int_0^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) \alpha(x, t) dx -$$

Преобразование задачи Коши к уравнению с обобщённой функцией в правой части

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x, 0) \psi(x) dx = (\tilde{f}(x, t) + \varphi(x) \otimes \delta'(t) + \psi(x) \otimes \delta(t), \alpha(x, t)), \text{ что и} \\
 & \text{требовалось. } \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x, 0) \psi(x) dx = \left(\psi(x), (\delta(t), \alpha(x, t)) \right) = (\psi(x) \otimes \delta(t), \alpha(x, t)), \\
 & - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi(x) dx = - \left(\varphi(x), (\delta(t), \alpha_t(x, t)) \right) = \left(\varphi(x), (\delta'(t), \alpha(x, t)) \right) = (\varphi(x) \otimes \delta'(t), \alpha(x, t))
 \end{aligned}$$

Существование и единственность решения свёрточного уравнения с волновым оператором

Рассмотрим общее свёрточное уравнение для волнового оператора с обобщённой функцией в правой части:

$$\square_a u = F(x, t), \quad (5.21)$$

где $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Теорема 5.3. Пусть $\text{supp } F \subset \overline{Q}$. Тогда свёрточное уравнение (5.21) имеет единственное решение с носителем, который принадлежит $\overline{Q}$, и это решение выражается формулой

$$u(x, t) = E(x, t) * F(x, t), \quad (5.22)$$

где E — фундаментальное решение волнового оператора.

Фундаментальное решение волнового оператора

Найдём свёртку (5.22) в следующих случаях: $n = 1, 2, 3$, а правая часть $F(x, t) = \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t)$. Вспомним, как устроено фундаментальное решение оператора Д'Аламбера:

- $n = 1 \Rightarrow E_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|);$
- $n = 2 \Rightarrow E_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}};$
- $n = 3 \Rightarrow E_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x).$

Формула Д'Аламбера. Формула Пуассона

- $n = 1 \Rightarrow$ формула Д'Аламбера

$$u(x, t) = E_1(x, t) * \left(\tilde{f}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(u_0(x + at) + u_0(x - at) \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi.$$

- $n = 2 \Rightarrow$ формула Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}} + \int_{|\xi-x|<at} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi}{\sqrt{a^2 (t - \tau)^2 - |\xi - x|^2}}.$$

Формула Кирхгофа

- $n = 3 \Rightarrow$ формула Кирхгофа

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{S_{at}(x)} u_0(\xi) ds \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) ds + \\ + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\xi - x| < at} \frac{1}{|\xi - x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a}\right) d\xi.$$

Теорема о существовании и единственности классического решения задачи Коши

Теорема 5.4.

- $n = 1$: $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C(\overline{Q})$. Тогда задача Коши (5.19) для волнового уравнения имеет единственное классическое решение $u \in C^2(\overline{Q})$, которое выражается формулой Д'Аламбера.
- $n \in \{2, 3\}$: $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^2(\overline{Q})$. Тогда задача Коши (5.19) для волнового уравнения имеет единственное классическое решение $u \in C^2(\overline{Q})$, которое выражается формулой Пуассона ($n = 2$) / формулой Кирхгофа ($n = 3$).

Содержание

1. Задача Гурса и её разрешимость
2. Функция Римана 2D гиперболического оператора
3. Задача Коши для 2D гиперболического уравнения
4. Задача Коши для волнового уравнения: классические и обобщённые решения
- 5. Задача Коши для уравнения теплопроводности**

Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности

Задача Коши для уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (5.23)$$

Здесь Δu — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ (относительно пространственных переменных), $a > 0$ — постоянный параметр.

Рассмотрим области:

- $Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ — 1/2 пространства-времени;
- $Q_T = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$ — слой пространства-времени.

Классическое решение $u \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$.

Преобразование задачи Коши к уравнению с обобщённой функцией в правой части

Пусть $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\overline{Q})$. Рассмотрим продолжения функций $\tilde{u}(x, t) = u(x, t)\theta(t)$, $\tilde{f}(x, t) = f(x, t)\theta(t)$ функций u, f в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Утверждение 5.5. Пусть $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ — классическое решение задачи Коши (5.23). Тогда $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}_t - a^2 \Delta \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta(t). \quad (5.24)$$

Доказательство утверждения 5.5 аналогично доказательству утверждения 5.4.

Может ли тогда решение задачи Коши (5.23) быть найдено как свёртка $E(x, t) * (\tilde{f}(x, t) + u_0(x) \otimes \delta(t))$, где E — фундаментальное решение оператора теплопроводности?

Теорема о существовании и единственности классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Обсудим существование и единственность классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Введём обозначения:

- $C_b(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций;
- $\tilde{C}_b^2(\bar{Q})$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, таких, что для любого $T > 0$ эти функции ограничены вместе со своими производными до второго порядка включительно в $\bar{Q}_T$;
- $\tilde{C}_b(\bar{Q})$ — пространство непрерывных функций, таких, что при любом $T > 0$ функции ограничены в $\bar{Q}_T$.

Теорема о существовании и единственности классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Теорема 5.5. Пусть $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_b^2(\overline{Q})$. Тогда существует и единственно классическое решение $u \in C^2(Q) \cap \tilde{C}_b(\overline{Q})$

задачи Коши (5.23) для уравнения теплопроводности, которое выражается формулой Пуассона

$$u(x, t) = E(x, t) * \left(u_0(x) \otimes \delta(t) + \tilde{f}(x, t) \right) = \\ = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t} \right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi - x|^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\left(2a\sqrt{\pi(t - \tau)} \right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi - x|^2}{4a^2(t - \tau)}} f(\xi, \tau) d\xi.$$

Организационные вопросы: сессия

ЭКЗАМЕНЫ

- 17.06.24: М8О-303Б-21 (09:00, ауд. 131 корпуса #3), М8О-305Б-21 (13:00, ауд. 131 корпуса #3);
- 21.06.24: М8О-304Б-21 (09:00, ауд. 637 ГУКа);
- 24.06.24: М8О-302Б-21 (09:00, ауд. 450 ГУКа), М8О-309Б-21 (13:00, ауд. 450 ГУКа).

КОНСУЛЬТАЦИИ

- 14.06.24, 13:00, ауд. 649 ГУКа: М8О-303Б-21, М8О-305Б-21;
- 19.06.24, 13:00, ауд. 649 ГУКа: М8О-304Б-21;
- 21.06.24, 13:00, ауд. 649 ГУКа: М8О-302Б-21, М8О-309Б-21.

Организационные вопросы: конец семестра

- Дедлайн семестра — **08.06.24, 23:59**. Все задания должны быть сданы до этого срока!
- Второй тест откроется утром **03.06.24** (понедельник). Его нужно будет пройти до **06.06.24, 23:59** (четверг).
- Итоговая таблица с результатами семестра будет выложена 09.06.24.
- Оценка за семестр **НЕ** сгорает на экзамене. Она зависит от числа сданных заданий и пройденных тестов (см. Программу).
- Программа экзамена уже доступна на странице курса в LMS и <https://baikov.org/pde>.