Уравнения в частных производных

Уравнения первого порядка

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

https://baikov.org/pde

Содержание

1. **Иерархия и примеры уравнений первого порядка**
2. Локальная теория задач Коши
3. Обобщённые решения уравнения $u_t + \big(f(u)\big)_x = 0$
4. Задача Римана о распаде разрыва
5. Уравнение Гамильтона—Якоби

Линейные уравнения первого порядка

- Линейное уравнение первого порядка специального вида:

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (3.1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $a_1, \ldots, a_n$ — известные коэффициенты. Предполагается, что $a_k \in C^1$.

- Линейное неоднородное уравнение первого порядка общего вида:

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x)u + f(x), \quad (3.2)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $a_1, \ldots, a_n,$ — известные коэффициенты класса C^1, b, f — известные коэффициенты правой части. Будем считать, что $b, f \in C$.

Квазилинейные уравнения первого порядка. Уравнение Гамильтона—Якоби

- Квазилинейное уравнение первого порядка:

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u), \quad (3.3)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $a_1 = a_1(x,u), \ldots, a_n = a_n(x,u)$ — известные коэффициенты, $f = f(x,u)$ — известная правая часть. Предполагается, что $a_1, \ldots, a_n, f \in C^1$.

- Уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, x_1, \ldots, x_{n-1}, t\right) = 0. \quad (3.4)$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — координаты, $x_n = t$ — время, $u = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ — неизвестная функция координат и времени,

Нелинейные уравнения первого порядка

$H = H(p_1, \ldots, p_{n-1}, x, t)$ — известная функция (функция Гамильтона). Предполагается, что H дважды непрерывно дифференцируемая относительно $p_1, \ldots, p_{n-1}, x$ и непрерывна относительно t.

- Общее нелинейное уравнение первого порядка:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = 0, \quad (3.5)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $F = F(p_1, \ldots, p_n, u, x)$ — известная функция. Предполагается, что $F \in C^2$.

Примеры уравнений первого порядка

1) Уравнение неразрывности на прямой, имеющее вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\rho = 0, \quad (3.6)$$

где $\rho = \rho(x,t)$ — неизвестная функция (плотность), $v = v(x,t)$ — известная функция (проекция скорости сплошной среды на ось Ox). Уравнение (3.6) в дифференциальной форме выражает закон сохранения некоторой скалярной величины (массы, электрического заряда и т.д.).

2) Уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

где $u = u(x,t)$ — неизвестная функция (проекция скорости точек сплошной среды на ось Ox).

Примеры уравнений первого порядка

Уравнение Хопфа описывает динамику сплошной среды на прямой, на точки которой не действуют силы.

3) Уравнение эйконала

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = 1,$$

где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция. $u(x) = ct$ — уравнение фронта.

Содержание

1. Иерархия и примеры уравнений первого порядка

2. Локальная теория задач Коши

3. Обобщённые решения уравнения $u_t + \big(f(u)\big)_x = 0$

4. Задача Римана о распаде разрыва

5. Уравнение Гамильтона—Якоби

Система характеристик для линейного уравнения специального вида

Линейному уравнению специального вида

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (3.7)$$

сопоставим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n)\,. \end{cases} \quad (3.8)$$

В системе (3.8) $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ — неизвестные функции переменной t, точка означает производную по этой переменной. Сделаем несколько терминологических замечаний.

Система характеристик: терминология

- Система (5.8) называется *системой характеристик*.
- $x_1, \ldots, x_n$ — фазовые переменные, t — фазовое время.
- $\mathbb{R}^n$ (или область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) — фазовое пространство.
- Если $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ — частное решение системы (3.8), то соответствующая этой параметризация кривая в фазовом пространстве называется *характеристикой*.
- Система характеристик (3.8) находится в однозначном соответствии с *характеристическим векторным полем* $\vec{c} = a_1(x)\vec{e}_1 + \ldots, a_n(x)\vec{e}_n$.
- Интеграл (первый интеграл) системы (3.8) эта функция $u = u(x), x \in Q$ (Q — подобласть фазового пространства), которая принимает постоянные значения на всех характеристиках из Q: $u\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right) = \text{const}$.

Интегралы системы характеристик

Утверждение 3.1. Функция $u = u(x), x \in Q$ — интеграл системы характеристик (3.8) $\Leftrightarrow$ $u = u(x)$ есть частное решение линейного уравнения специального вида (3.7).

Для доказательства достаточно найти полную производную функции $u = u(x)$ в силу системы (3.8):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = \mathscr{L}u\,.$$

Расширенная система характеристик для линейного уравнения общего вида

Линейному неоднородному уравнению общего вида

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x)u + f(x) \quad (3.9)$$

сопоставим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{u} = b(x)u + f(x)\,. \end{cases} \quad (3.10)$$

В системе (3.10) $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), u = u(t)$ — неизвестные функции фазового времени t, точка означает производную по t.

Расширенная система характеристик для линейного уравнения общего вида

Отметим, что первые n уравнений системы (3.10) можно рассматривать отдельно, они образуют систему (3.8). Имеем:

- (3.8) — система характеристик уравнения (3.9);
- (3.10) — расширенная система характеристик уравнения (3.9).

Пусть $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ — частное решение системы (3.8), тогда последнее уравнение системы (3.10) после подстановки принимает вид

$$\dot{u} = b\left(x(t)\right) u + f\left(x(t)\right). \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) есть линейное неоднородное уравнение первого порядка, его легко проинтегрировать.

Система характеристик для квазилинейного уравнения первого порядка

Квазилинейному уравнению первого порядка

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u), \quad (3.12)$$

сопоставим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n, u), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n, u), \\ \dot{u} = f(x_1, \ldots, x_n, u)\,. \end{cases} \quad (3.13)$$

В системе (3.13) $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), u = u(t)$ — неизвестные функции переменной t, точка означает производную по этой переменной.

Система характеристик для квазилинейного уравнения первого порядка

Система (3.13) называется *системой характеристик* для квазилинейного уравнения (3.12), фазовые кривые системы (3.13) называются *характеристиками*. Теперь фазовое пространство системы характеристик имеет размерность $n+1$, где n — число независимых переменных уравнения (3.12), а характеристическое векторное поле есть $\vec{c} = a_1(x,u)\vec{e}_1 + \ldots + a_n(x,u)\vec{e}_n + f(x,u)\vec{e}_{n+1}$. Установим связь между уравнением (3.12) и системой (3.13) (между уравнением (3.10) и системой (3.11)).

Утверждение 3.2. Пусть $u = \varphi(x)$ — частное (классическое) решение уравнения (3.12), $x \in Q$, тогда его 0-график есть характеристическая поверхность системы (3.13).

Характеристические поверхности

Замечание. Поверхность в фазовом пространстве системы характеристик (3.13) называется *характеристической*, если она состоит из (может быть неполных) характеристик.

Лемма 3.1. Любая характеристика системы (3.13) $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), u = u(t), t_1 < t < t_2$, где $t_1 < 0 < t_2$, отличная от точки, в каждой точке касается характеристического векторного поля $\vec{c}$.

Доказательство утверждения 3.2. Пусть Γ — график решения $u = \varphi(x), x \in Q$, покажем, что в каждой точке $P \in \Gamma$ $\vec{c} \in T_P\Gamma$, т.е. $\vec{c}$ есть касательный вектор к Γ.

Характеристические поверхности

Действительно, $\vec{\nu} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\vec{e_n} - \vec{e}_{n+1}$ — нормаль к Γ,

поэтому $\vec{c}\cdot\vec{\nu} = a_1(x,\varphi(x))\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,\varphi(x))\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} -$

$-f(x,\varphi(x)) = 0$ при всех x из области определения φ, так как $u = \varphi(x)$ — частное решение уравнения (3.12) $\Rightarrow \vec{c} \in T_P\Gamma$ (касательному пространству к Γ в точке P).

Замечание. $\Phi(x,u) = \text{const} = C$ — интеграл системы (3.13), разрешим его относительно u, получим $u = \varphi(x,C)$ — частное решение уравнения (3.12).

Система характеристик для общего нелинейного уравнения первого порядка

Общему нелинейному уравнению

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = 0, \quad (3.14)$$

сопоставим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{\partial F}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\dfrac{\partial F}{\partial x_k} - p_k \dfrac{\partial F}{\partial u}, k = 1, \ldots, n, \\ \dot{u} = p_1 \dfrac{\partial F}{\partial p_1} + \ldots + p_n \dfrac{\partial F}{\partial p_n}, \end{cases} \quad (3.15)$$

состоящую из $(2n + 1)$ уравнения. Предполагается, что $F \in C^2$.

Система характеристик для общего нелинейного уравнения первого порядка

Чтобы получить систему (3.15), предположим, что $u = u(x)$ — C^2-решение уравнения (3.14). Продифференцируем тождество $F(p(x), u(x), x) = 0$ по $x_k, k = 1, \ldots, n, p = \nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial u} p_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} = 0.$$ Учитывая, что $\dfrac{\partial p_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$,

мы получаем квазилинейное уравнение относительно $p_k = p_k(x)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial F}{\partial u} p_k. \quad (3.16)$$

Система характеристик для общего нелинейного уравнения первого порядка

Запишем систему характеристик для квазилинейного уравнения (3.16):

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial F}{\partial p_1}, \ldots, \dot{x}_n = \frac{\partial F}{\partial p_n}, \dot{p}_k = -\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial F}{\partial u} p_k, k = 1, \ldots, n. \quad (3.17)$$

Объединяя уравнения характеристик (3.17), полученные для каждого p_k, получим первые $2n$ уравнения системы (3.15). Для вывода последнего уравнения найдём производную $\frac{du}{dt}$ в силу системы $\dot{x}_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}, k = 1, \ldots, n$: $\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}$.

1-график решения. Связь системы характеристик с нелинейным уравнением первого порядка

Определение 3.1. 1-графиком непрерывно дифференцируемой функции $u = u(x)$ называется поверхность вида

$$\left(x^T, u(x), \nabla u(x)^T\right)^T = \left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \text{ в } \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Утверждение 3.3. Пусть $u = \varphi(x)$ — частное решение уравнения (3.14), тогда его 1-график есть характеристическая поверхность системы (3.15).

Система характеристик для уравнения Гамильтона—Якоби

Система характеристик (3.15) для уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, x_1, \ldots, x_{n-1}, t\right) = 0 \quad (3.18)$$

имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial x_k}, k = 1,\ldots, n-1, \\ \dot{t} = 1, \dot{p}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ \dot{u} = p_1\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + p_{n-1}\dfrac{\partial H}{\partial p_{n-1}} + p_n\,. \end{cases} \quad (3.19)$$

Первые $2(n-1)$ уравнение системы (3.19) — гамильтонова система.

Задача Коши для линейного уравнения первого порядка

Задача Коши для линейного уравнения общего вида (3.2) (и, в частности, специального вида (3.1)) представляет собой

$$\begin{cases} a_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = b(x)u + f(x), \\ u(x) = \varphi(x), x \in \gamma \Leftrightarrow u\big|_\gamma = \varphi, \end{cases} \qquad (3.21)$$

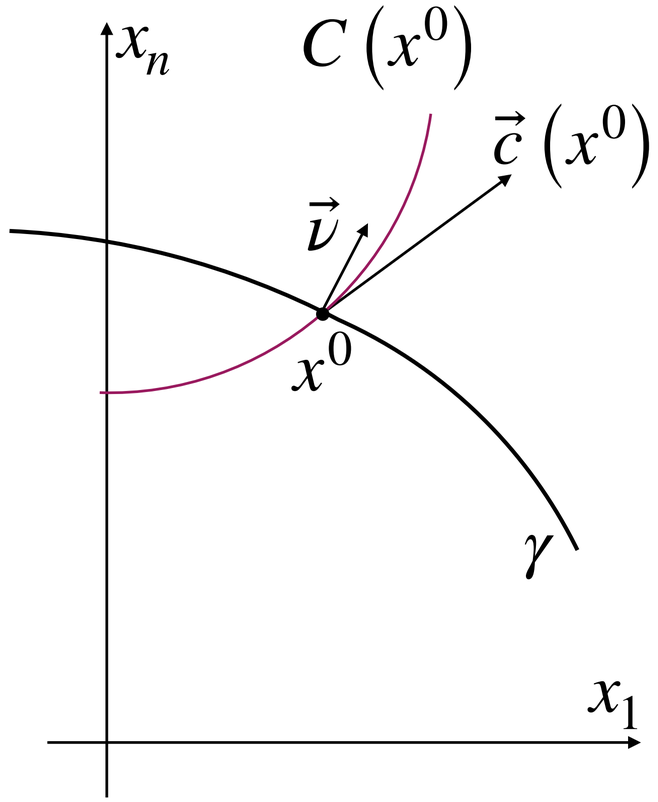
где γ — *начальная гиперповерхность* в $\mathbb{R}^n$ класса C^1, $\varphi \in C^1(\gamma)$ — *начальная функция*. Возможны две постановки задачи (3.21).

- **Локальная:** найти классическое (непрерывно дифференцируемое) решение задачи Коши (3.21) в какой-нибудь окрестности точки $x^0 \in \gamma$.
- **Глобальная:** найти *максимальную* область существования и единственности решения задачи Коши (3.21) для всей γ, либо для фиксированного куска γ.

Геометрическая идея решения

Идея решения задачи Коши (3.21):

1) взять точку $x^0 \in \gamma$;
2) если характеристический вектор $\vec{c}\left(x^0\right) \neq 0$ и **не касается** γ в точке x^0, то рассмотреть проходящую через неё характеристику $x = x(t), x(0) = x^0$ — обозначим её через $C\left(x^0\right)$;
3) получить решение задачи (3.21) вдоль $C\left(x^0\right)$ как решение задачи Коши для ОДУ вида $\dot{u} = b\left(x(t)\right) u + f\left(x(t)\right), u(0) = \varphi\left(x^0\right)$;
4) повторить пп. 1)—3) для других точек γ.



Условие трансверсальности. Теорема о существовании и единственности решения

Успех предприятия зависит от того, выполнено ли *условие трансверсальности*

$$\vec{c}(x) \notin T_x\gamma, \quad (3.22)$$

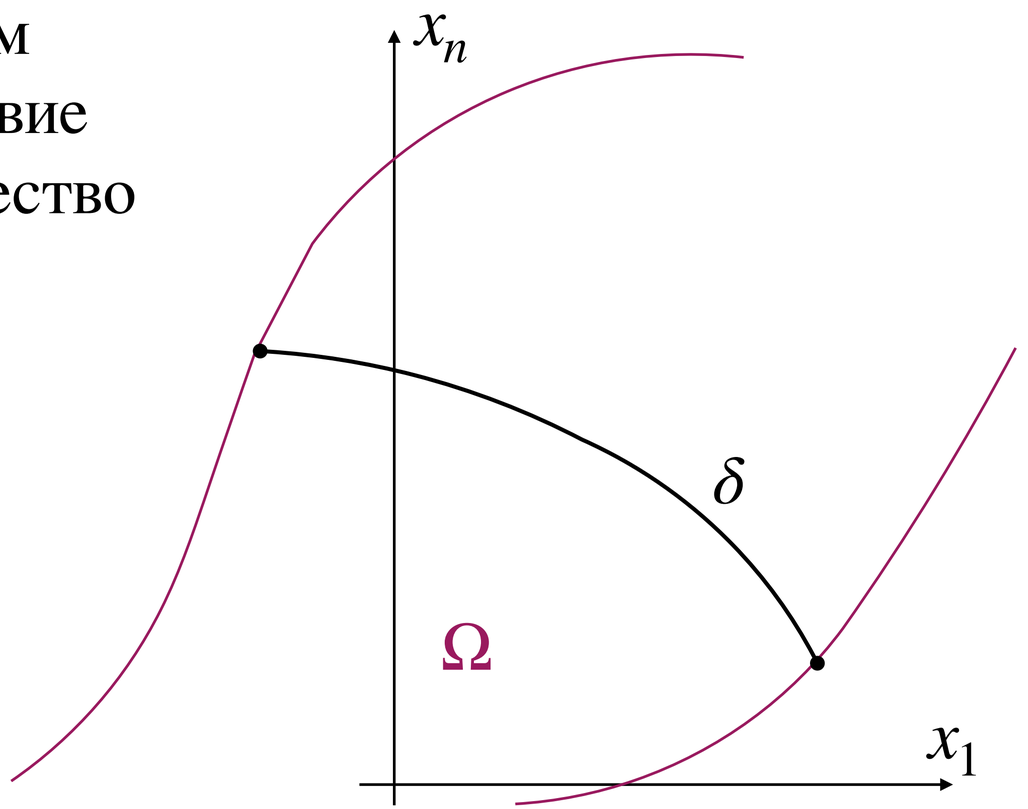
означающее, что характеристический вектор $\vec{c}(x) = a_1(x)\vec{e}_1 + \ldots, a_n(x)\vec{e}_n$ *трансверсален* (не касается) начальной гиперповерхности γ в точке $x \in \gamma$, в частности, не равен нулю. Если $\vec{\nu} = \vec{\nu}(x)$ — нормальный вектор к γ в точке x, то условие (3.22) можно записать в виде $\vec{c}(x) \cdot \vec{\nu}(x) \neq 0$.

Теорема 3.1. Пусть в точке $x^0 \in \gamma$ выполнено условие трансверсальности (3.22). Тогда существует окрестность $U\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$, в которой задача Коши (3.21) имеет единственное классическое решение.

Область влияния (существования и единственности)

Рассмотрим теперь глобальную постановку задачи Коши и сформулируем основной результат.

Теорема 3.2. Пусть на линейно связном открытом куске $\delta \subset \gamma$ выполнено условие трансверсальности (3.22). Тогда множество всех полных характеристик, проходящих через точки δ, образует Ω — максимальную область существования и единственности решения задачи Коши (3.21) для куска δ начальной гиперповерхности γ.



Задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

Задача Коши для квазилинейного уравнения общего вида (3.3) имеет вид

$$\begin{cases} a_1(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u), \\ u(x) = \varphi(x), x \in \gamma \Leftrightarrow u\big|_{\gamma} = \varphi, \end{cases} \qquad (3.23)$$

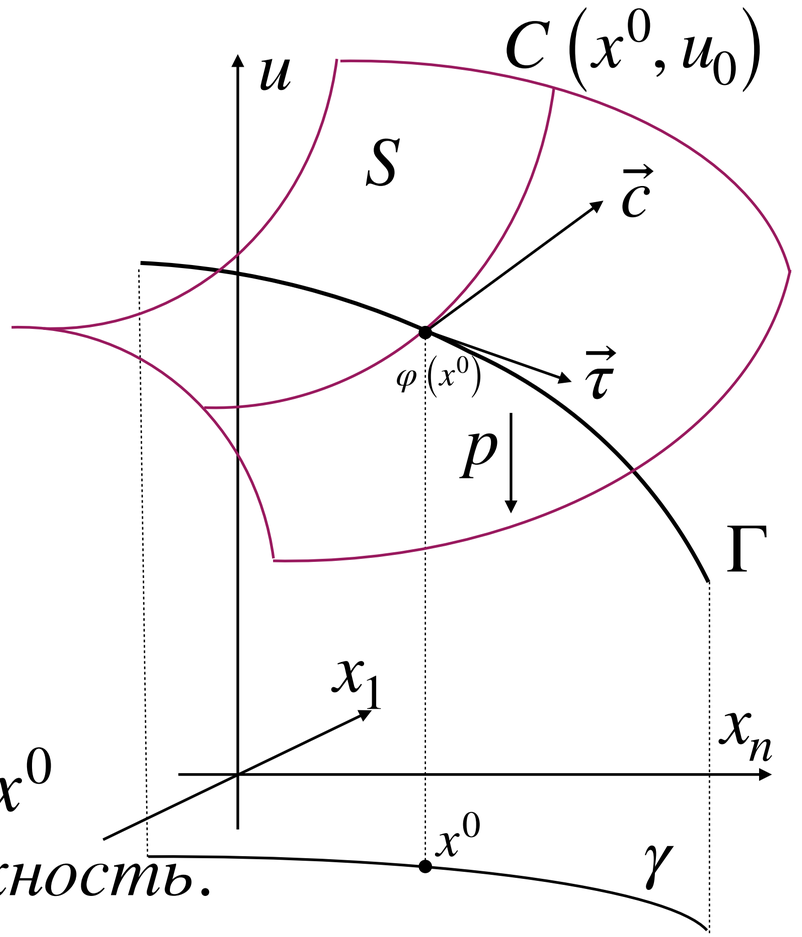
где γ — *начальная гиперповерхность* в $\mathbb{R}^n$ класса C^1, $\varphi \in C^1(\gamma)$ — *начальная функция*. Также рассмотрим график начальной функции

$\Gamma = \{u = \varphi(x) : x \in \gamma\}$ — $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Геометрическая идея решения

Идея решения задачи Коши (3.23):

1) взять точку $x^0 \in \gamma$ и соответствующую точку $\left(x^0, u_0\right) \in \Gamma$, где $u_0 = \varphi\left(x^0\right)$;
2) если характеристический вектор $\vec{c}\left(x^0, u_0\right) \neq 0$ и **не касается** Γ в точке $\left(x^0, u_0\right) \in \Gamma$, рассмотреть проходящую через неё характеристику $x = x(t), u = u(t), x(0) = x^0, u(0) = u_0$, — обозначим её через $C\left(x^0, u_0\right)$;
3) повторить эти пункты для других точек x^0 и получить *характеристическую поверхность*.



Условие трансверсальности

Предположим, что для всех $x \in \gamma$ характеристический вектор $\vec{c}\left(x, \varphi(x)\right) \notin T_{x,\varphi(x)}\Gamma$. Когда характеристическая гиперповерхность S есть график функции $u = u(x)$? Тогда и только тогда, когда **отображение проектирования** $p : S \to \mathbb{R}^n$ не имеет *особенностей*, в которых его дифференциал dp вырождается.

Точка $\left(x^0, u_0\right) \in \Gamma$ неособая для p, если и только если гиперплоскость, построенная на векторе $\vec{c}\left(x^0, u_0\right) \neq 0$ и касательном пространстве $T_{x^0,u_0}\Gamma$, **не вертикальная**. Т.е. касательная гиперплоскость к характеристической гиперповерхности не вертикальная. Объединим это условие с условием $\vec{c}\left(x^0, u_0\right) \notin T_{x^0,u_0}\Gamma$ и получим *условие трансверсальности* задачи (3.23) в точке $\left(x^0, u_0\right) \in \Gamma$.

Условие трансверсальности

Например, если $n = 2$, кривая γ имеет параметризацию в окрестности x^0 вида $x_1 = x_1(q), x_2 = x_2(q)$, причём $x_1^0 = x_1(0), x_2^0 = x_2(0)$, то касательный вектор к Γ имеет вид $\vec{\tau} = \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\dot{x}_2\right)\vec{e}_3$. $\vec{c}\left(x^0, u_0\right) \notin T_{x^0,u_0}\Gamma \Leftrightarrow$ $\vec{\nu} = \vec{c} \times \vec{\tau} \neq 0$. Чтобы плоскость, натянутая на $\vec{c}$ и $\vec{\tau}$ в точке $\left(x^0, u_0\right) \in \Gamma$, не была вертикальной, необходимо и достаточно, чтобы её нормаль $\vec{\nu}$ не была горизонтальной: $\nu_3 \neq 0 \Leftrightarrow a_1\left(x_1^0, x_2^0, u_0\right)\dot{x}_2(0) - a_2\left(x_1^0, x_2^0, u_0\right)\dot{x}_1(0) \neq 0$.

В случае произвольного n пусть $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_{n-1}$ — проекции касательных к $T_{x^0,u_0}\Gamma$ векторов $\vec{\tau}_1, \ldots, \vec{\tau}_{n-1}$ на гиперплоскость $x_1, \ldots, x_n$,
$\vec{a} = a_1\left(x^0, u_0\right)\vec{e}_1 + \ldots + a_n\left(x^0, u_0\right)\vec{e}_n$.

Условие трансверсальности. Теорема о существовании и единственности решения

Тогда условие трансверсальности заключается в том, что система векторов $\vec{a}$ и $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_{n-1}$ линейно независимая:

$$\operatorname{rank}\left(\vec{a}, \vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_{n-1}\right) = n. \quad (3.24)$$

Теорема 3.3. Пусть для точки $x^0 \in \gamma$ выполнено условие трансверсальности (3.24). Тогда существует окрестность $U\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$, в которой задача Коши (3.23) имеет единственное классическое решение.

График классического решения — часть характеристической поверхности S, над окрестностью $U\left(x^0\right)$, она однозначно проектируется на плоскость переменных $x_1, \ldots, x_n$. Однако, за пределами этой части поверхности отображение проектирования p может иметь особенности.

Замечание об эволюционных уравнениях и стандартных задачах Коши

Уравнение первого порядка (3.3) имеет эволюционный вид, если его можно разрешить относительно производной по одной переменной — переменной времени t: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = F\left(\nabla_x u, u, x, t\right)$, где $\nabla_x u$ — градиент относительно пространственных переменных x, F — известная функция. Стандартная задача Коши для эволюционного уравнения:

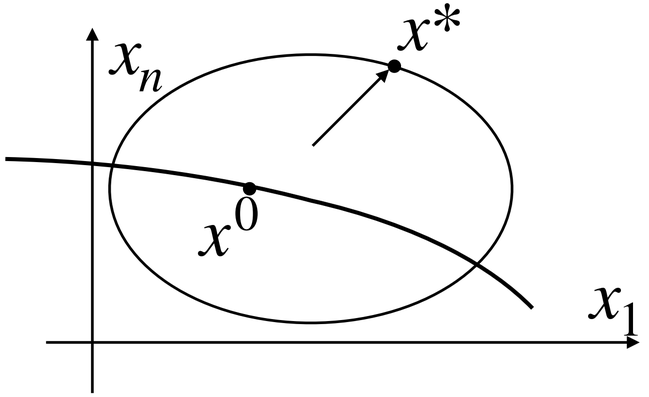
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F\left(\nabla_x u, u, x, t\right), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

(φ — начальная функция). Для стандартной задачи Коши условие трансверсальности выполнено всегда.

Особенности классических решений квазилинейных уравнений первого порядка

$U\left(x^0\right)$ — область существования решения.

- *Градиентная катастрофа*: решение остаётся ограниченной и непрерывной функцией, но его градиент ∇u неограничен при $U\left(x^0\right) \ni x \to x^*$.
- *Blow-up* (взрывное решение): решение неограничено при $U\left(x^0\right) \ni x \to x^*$.



Содержание

1. Иерархия и примеры уравнений первого порядка
2. Локальная теория задач Коши
3. **Обобщённые решения уравнения** $u_t + \big(f(u)\big)_x = 0$
4. Задача Римана о распаде разрыва
5. Уравнение Гамильтона—Якоби

Определение обобщённого решения дивергентного квазилинейного уравнения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой существует классическое (непрерывно дифференцируемое) решение $u = u(x,t)$ уравнения

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \quad (3.25)$$

где $f \in C^1(\mathbb{R})$ — известная функция (для уравнения Хопфа $f(u) = \frac{1}{2}u^2$). Например, $\Omega = \Pi_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$.

Умножим уравнение (3.25) на *пробную функцию* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω: $\iint_\Omega \left(u_t + \left(f(u)\right)_x\right) v dxdt = 0$ (на самом деле интегрирование по $Q \Subset \Omega$, $\partial Q \in C^1$, $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q}$).

Определение обобщённого решения дивергентного квазилинейного уравнения

Применим формулу интегрирования по частям:

$$0 = \iint_{\Omega} \left(u_t + \left(f(u) \right)_x \right) v dx dt = \int_{\partial Q} \left(uv\nu_t + f(u)v\nu_x \right) ds -$$

$$- \iint_{\Omega} \left(uv_t + f(u)v_x \right) dx dt = - \iint_{\Omega} \left(uv_t + f(u)v_x \right) dx dt = 0.$$

Определение 3.2. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ называется *обобщённым (слабым) решением* уравнения (3.25) в области Ω, если для любой пробной функции $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Omega} \left(uv_t + f(u)v_x \right) dx dt = 0. \quad (3.26)$$

Определение обобщённого решения дивергентного квазилинейного уравнения

Утверждение 3.4. Если функция $u \in C^1(\Omega)$ есть обобщённое решение уравнения (3.25), т.е. удовлетворяет определению 3.2, то она является классическим решением уравнения (3.25).

Доказательство основано на обратном интегрировании по частям и лемме Дюбуа-Реймона.

Рассмотрим стандартную задачу Коши для дивергентного квазилинейного уравнения:

$$\begin{cases} u_t + \big(f(u)\big)_x = 0, (x,t) \in \Pi_T, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \end{cases} \qquad (3.27)$$

где $u_0 = u_0(x)$ — известная *начальная функция*.

Определение обобщённого решения задачи Коши

Для определения обобщённого решения мы должны указать в постановке задачи Коши, в какой именно области мы желаем найти обобщённое решение. При этом ширину T полосы Π_T можно регулировать, считая параметром. Пусть

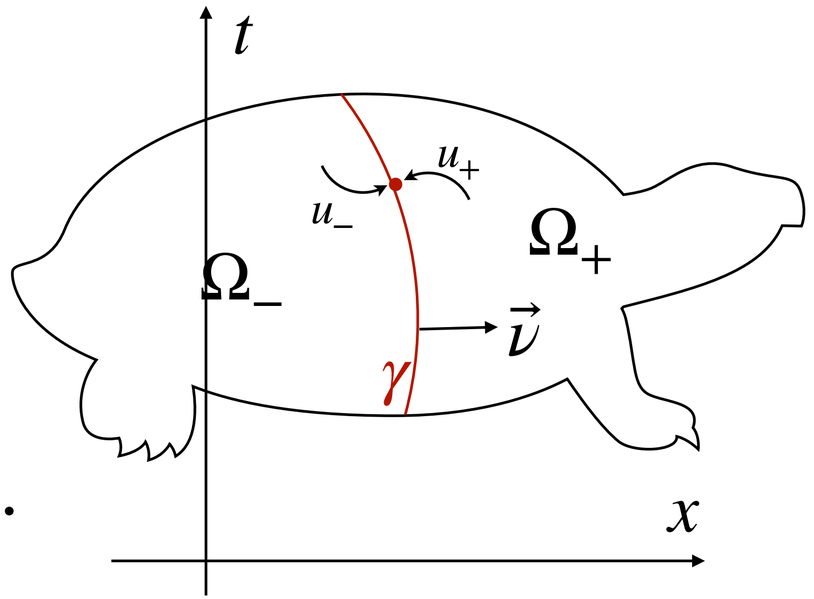
$\tilde{\Pi}_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 \leqslant t < T\}$ — *полузамыкание полосы*.

Определение 3.3. Функция $u \in L_{1,loc}\left(\tilde{\Pi}_T\right)$ называется обобщённым (слабым) решением задачи Коши (3.27) в полосе Π_T, если для любой пробной функции $v \in C_0^\infty\left(\tilde{\Pi}_T\right)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Pi_T} \left(uv_t + f(u)v_x\right) dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v\,\big|_{t=0}\, dx = 0. \quad (3.28)$$

Ударные волны

Вернёмся к уравнению (3.25). Допустим, что область Ω разделена на две части Ω_+ и Ω_- гладкой кривой $\gamma \subset \Omega$: $\Omega = \Omega_- \sqcup \gamma \sqcup \Omega_+$. Пусть $\vec{\nu}$ — ориентирующее γ поле единичных нормалей. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ имеет класс $\tilde{C}^1$ с разрывом γ, если $u\big|_{\Omega_+} \in C^1\left(\Omega_+ \cup \gamma\right), u\big|_{\Omega_-} \in C^1\left(\Omega_- \cup \gamma\right)$.



В любой точке $(x_0, t_0)^T \in \gamma$ существуют

$$u_-(x_0,t_0) = \lim_{\Omega_- \ni (x,t)^T \to (x_0,t_0)^T} u(x,t), \; u_+(x_0,t_0) = \lim_{\Omega_+ \ni (x,t)^T \to (x_0,t_0)^T} u(x,t).$$

Ударные волны. Условие Ранкина—Гюгонио

Определение 3.4. *Ударной волной* называется обобщённое решение уравнения (3.25) или задачи Коши (3.27) класса $\tilde{C}^1$.
Очевидно, что обобщённое решение уравнения (3.25) в области Ω класса $\tilde{C}^1$ с разрывом γ есть классическое решение этого уравнения в подобластях Ω_- и Ω_+. Установим, какому условию должна удовлетворять ударная волна на линии разрыва γ.
Теорема 3.4. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ класса $\tilde{C}^1$ с разрывом γ — ударная волна (т.е. обобщённое решение уравнения (3.25)) $\Leftrightarrow$ она есть классическое решение уравнения (3.25) в $\Omega_- \sqcup \gamma$ и $\Omega_+ \sqcup \gamma$, удовлетворяющее на линии разрыва γ *условию Ранкина—Гюгонио*: в любой точке $(x_0, t_0)^T \in \gamma$

$$\left(u_+ - u_-\right)\nu_t + \left(f\left(u_+\right) - f(u_-)\right)\nu_x = 0, \quad (3.29)$$

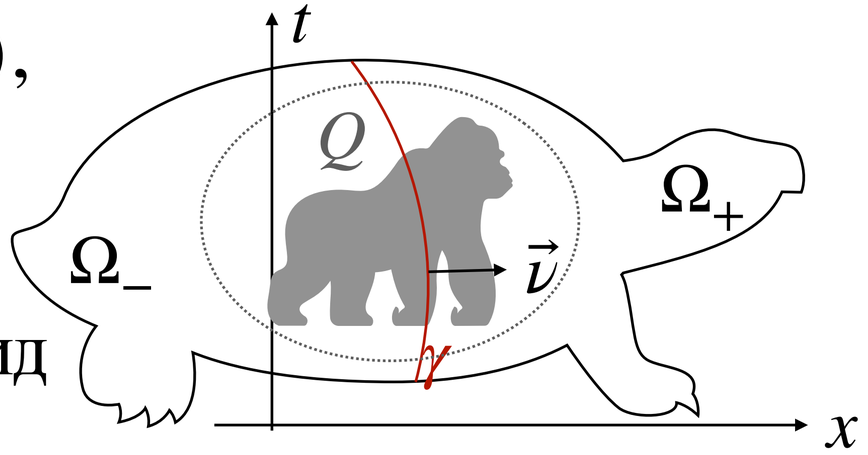
Условие Ранкина—Гюгонио

где $u_- = u_-(x_0, t_0), u_+ = u_+(x_0, t_0), \nu_t, \nu_x$ — координаты $\vec{\nu}(x_0, t_0)$.

Замечание. Если линия разрыва γ имеет вид графика $x = \gamma(t)$, $\alpha < t < \beta$, то условие (3.29) может быть переписано в виде

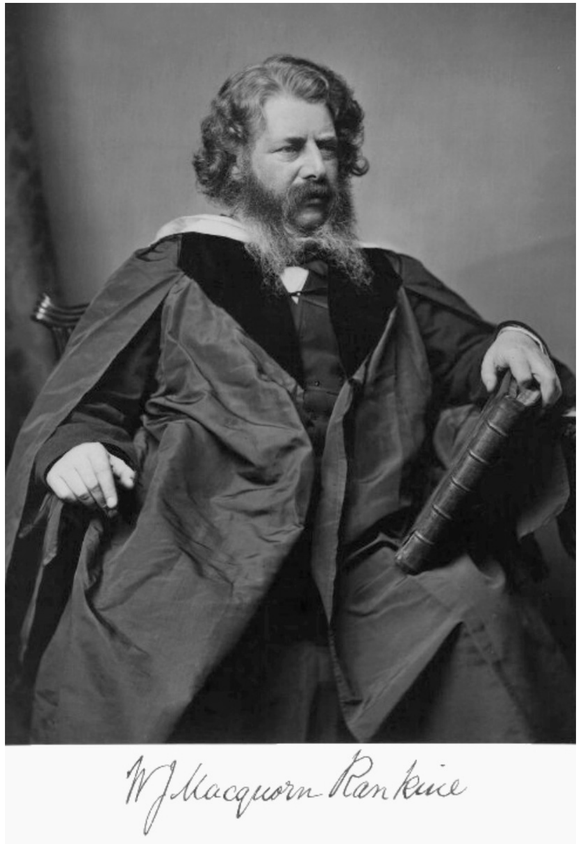
$$\gamma'(t_0) = \frac{f\left(u_+\right) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \text{ для любого } t_0 \in (\alpha, \beta).$$

Доказательство $\Rightarrow$. Пусть $v \in C_0^1(\Omega)$, $\operatorname{supp} v \cap \Omega_- \neq \varnothing$, $\operatorname{supp} v \cap \Omega_+ \neq \varnothing$, $\operatorname{supp} v \subset Q, \partial Q \in C^1$. Тогда интегральное тождество (3.26) имеет вид



Условие Ранкина—Гюгонио

$$0 = \iint_{Q_-} \left(uv_t + f(u)v_x\right) dxdt + \iint_{Q_+} \left(uv_t + f(u)v_x\right) dxdt = -\iint_{Q_-} \left(u_t + \left(f(u)\right)_x\right) vdxdt - \iint_{Q_+} \left(u_t + \left(f(u)\right)_x\right) vdxdt + \int_{\gamma \cap Q} \left(u_- \nu_t + f\left(u_-\right)\nu_x\right) v\big|_{\gamma \cap Q} ds + \int_{\gamma \cap Q} \left(u_+(-\nu_t) + f\left(u_+\right)(-\nu_x)\right) v\big|_{\gamma \cap Q} ds.$$



William Rankine (1820 — 1972)

Ударные волны. Условие Ранкина—Гюгонио

Отсюда

$$\int_\gamma \left(\left(u_- - u_+ \right) \nu_t + \left(f(u_-) - f\left(u_+\right) \right) \nu_x \right) \psi ds = 0$$

для всех $\psi \in C_0^\infty(\gamma)$ (используем поднятие функции $\psi \in C_0^\infty(\gamma)$ до функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$). Тогда по лемме Дюбуа-Реймона

$$\left(u_- - u_+ \right) \nu_t + \left(f(u_-) - f\left(u_+\right) \right) \nu_x = 0$$

на γ.

Pierre Henri Hugoniot (1851 — 1887)

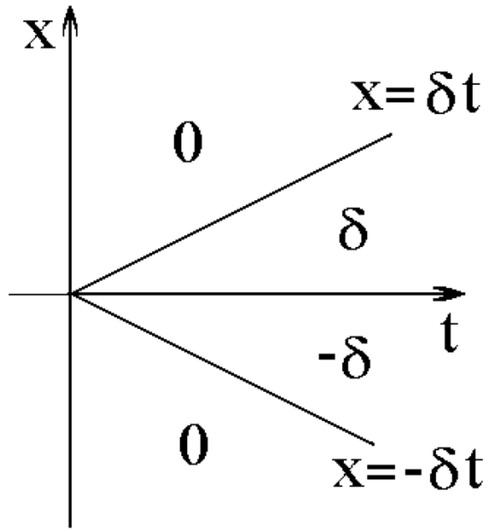
Неединственность решения

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t + \left(f(u)\right)_x = 0, \;\; u\big|_{t=0} = 0, \;\; (3.30)$$

с функцией $f(u) = u^2$. Её классическое решение: $u(x,t) \equiv 0$. Тем не менее мы можем построить отличные от тождественного нуля обобщённые решения:

$$u_\delta(x,t) = \begin{cases} 0, x < -\delta t, \\ -\delta, \; -\delta t < x < 0, \\ \delta, 0 < x < \delta t, \\ 0, x > \delta t \end{cases}$$



Функция энтропии

Рассмотрим для уравнения (3.25) *функцию (функционал) энтропии*

$$E_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u(t,x)\right) dx. \quad (3.31)$$

Будем рассматривать классические и обобщённые решения дивергентного квазилинейного уравнения (3.25) с конечной функцией (3.31).

Утверждение 3.5. Для классических решений задачи Коши (3.27) в $\tilde{\Pi}_T$ функция (3.31) постоянная: $E_u(t) = E_u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u_0(x)\right) dx$

для всех $t \in [0,T)$.

Обобщённое энтропийное решение

Определение 3.5. Обобщённое решение уравнения (3.25) (или задачи Коши (3.27)) называется *энтропийным*, если: 1) для любого $t \in (0,T)$ (или $t \in [0,T)$) функция энтропии (3.31) конечна; 2) функция энтропии (3.31) **не возрастает** со временем.

Замечание. Построенные обобщённые решения задачи Коши (3.30) не являются энтропийными. Энтропийной решение единственно — это классическое тривиальное решение $u(x,t) \equiv 0$.