

Уравнения в частных производных

Теория обобщённых функций

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

<https://baikov.org/pde>

Содержание

- 1. Пространства основных функций**
2. Определение и примеры обобщённых функций
3. Простые операции над обобщёнными функциями
4. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры
5. Преобразование Фурье
6. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984)

15. The δ function

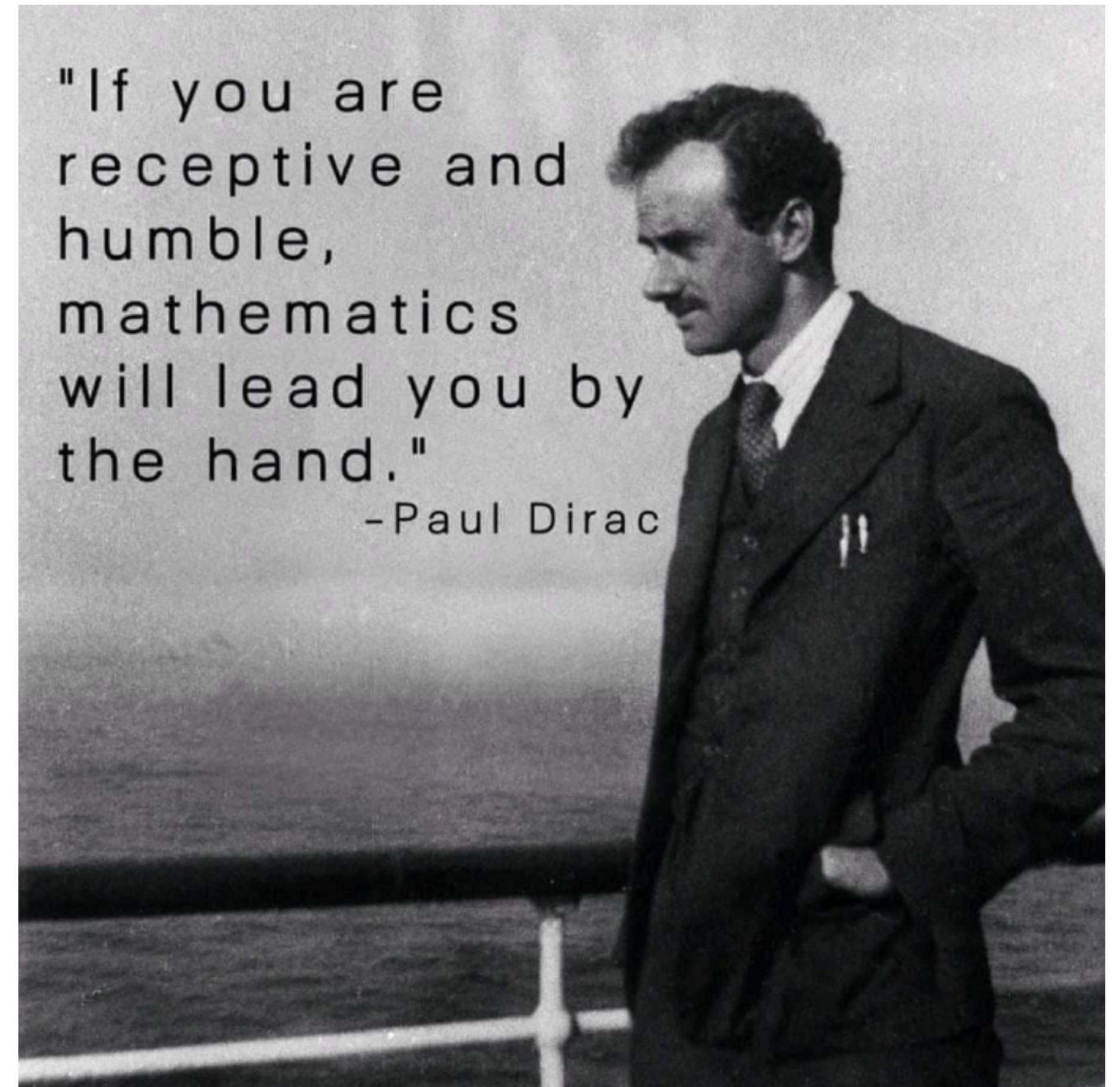
Our work in § 10 led us to consider quantities involving a certain kind of infinity. To get a precise notation for dealing with these infinities, we introduce a quantity $\delta(x)$ depending on a parameter x satisfying the conditions

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \\ \delta(x) &= 0 \text{ for } x \neq 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

The most important property of $\delta(x)$ is exemplified by the following equation,

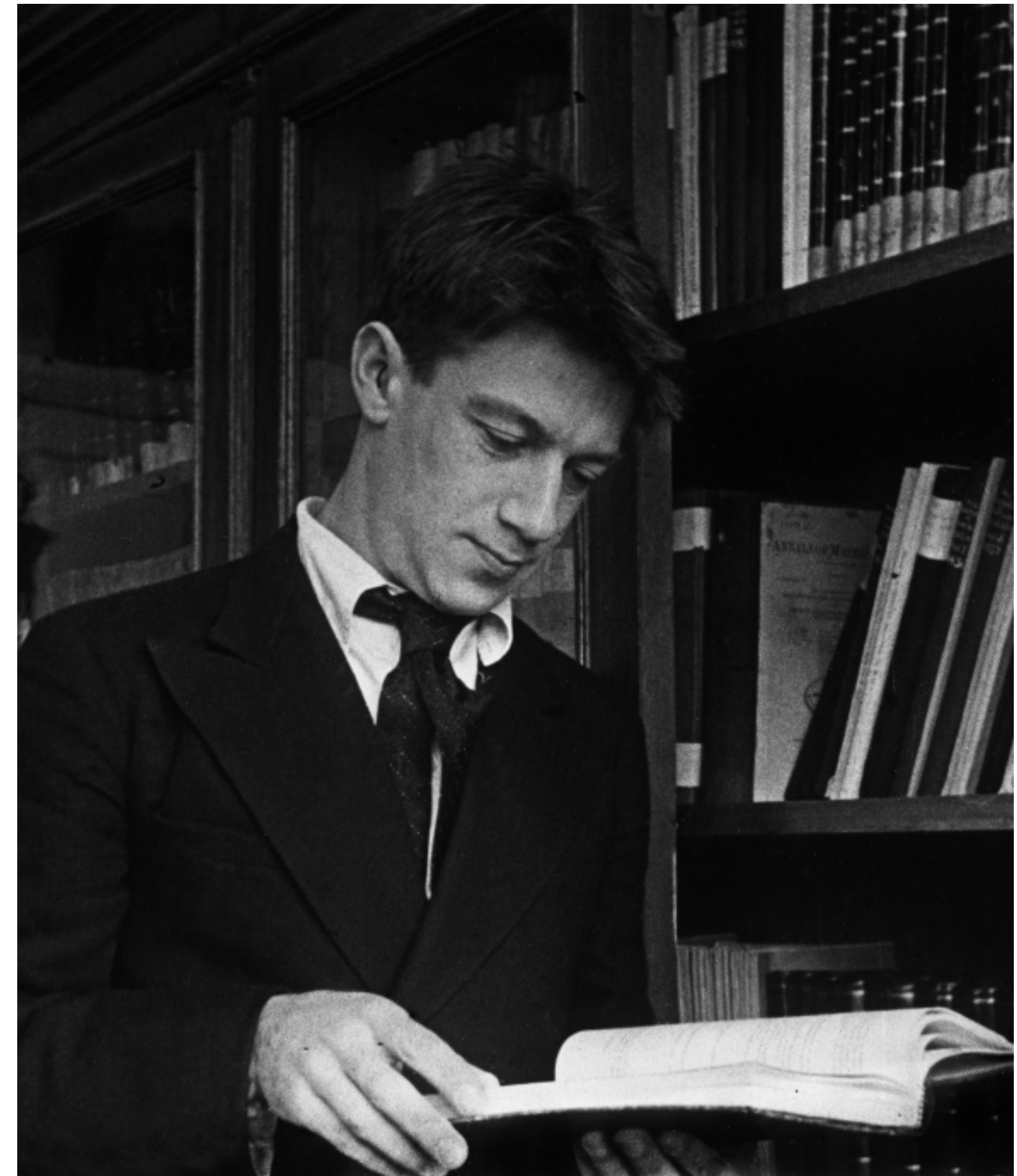
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad (3)$$

where $f(x)$ is any continuous function of x . We can easily see the



Сергей Львович Соболев (1908 — 1989)

Великий советский математик.
Создал теорию пространств
Соболева и двойственных к ним
(пространств линейных непрерывных
функционалов), создал современную
функциональную теорию УЧП.
Двойственные пространства
Соболева состоят из *сингулярных*
обобщённых функций.



Laurent Schwartz (1915 — 2002)



Лоран Шварц (1915 — 2002)

Создал теорию распределений, придумал преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста (Филдсовская медаль 1950 г.).

Полунормы и нормы

Пусть X — векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел. Функция $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ называется *полунормой*, если:

- 1) для любых $x_1, x_2 \in X$ $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$
(*неравенство треугольника*);
- 2) для любого $x \in X$ и любого числа λ $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
(*однородность*);

Если полунорма *невырождена*, т.е. из $p(x) = 0$ следует $x = 0$, то она называется *нормой*.

Полинормированные пространства

Определение 4.1. Полинормированное пространство — это пара $\left(X, \{p_j\}_{j \in J}\right)$, состоящая из векторного пространства X и множества полунорм $p_j, j \in J$, в нём, удовлетворяющих *аксиоме отделимости*: если $\forall j \in J p_j(x) = 0$, то $x = 0$.

Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в полинормированном пространстве, если она сходится относительно каждой полунормы: $\forall j \in J$ верно $p_j(x_k - x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где x — предел последовательности.

Пример. Счётно-нормированные пространства

Пример. Пусть S — непустое множество, а $X = \mathbb{R}^S$ — векторное пространство всех функций над S , принимающих вещественные значения, с естественными линейными операциями. Положим для каждого $s \in S$ $p_s(x) = |x(s)|$. Последовательность функций сходится относительно этого множества полунорм тогда и только тогда, когда она сходится в каждой точке множества S .

Если множество полунорм конечно и выполнена аксиома отделимости, то имеем пространство с нормой $\|x\| = \sum_j p_j(x)$.

Следующие по сложности — пространства со счётной нормировкой.

Метризация счётно-нормированного пространства

Полунормы счётно-нормированного пространства называются *согласованными*, если $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots$ для всех $x \in X$.
Согласование: $\{\tilde{p}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \Rightarrow$
 $p_j = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \dots + \tilde{p}_j$. Счётно-нормированное пространство можно метризовать:

$$\rho(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x_1 - x_2)}{1 + p_j(x_1 - x_2)}.$$



Maurice René Fréchet (1878 — 1973)

Пространство Фреше. Пространство гладких функций $C^\infty(\overline{\Omega})$

Сходимость последовательности относительно этой метрики и сходимость относительно счётного множества полунорм эквивалентны.

Определение 4.2. Счётно-нормированное пространство называется *пространством Фреше*, если оно полное относительно указанной выше метрики.

Рассмотрим счётное множество полунорм (норм) в $C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$\|\varphi\|_m = \|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{\overline{\Omega}} |D^\alpha \varphi| \quad (\text{норма равномерной сходимости}$$

всех производных до порядка m). Очевидно, что $C^\infty(\overline{\Omega})$ — счётно-нормированное пространство относительно указанного множества норм.

Пространство гладких функций $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Следовательно, $C^\infty(\overline{\Omega})$ — метрическое пространство. Критерий Коши равномерной сходимости влечёт полноту этого пространства $\Rightarrow C^\infty(\overline{\Omega})$ пространство Фреше.

Пусть $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \dots$ — последовательность ограниченных областей, стремящихся к $\mathbb{R}^n$ (т.е. их объединение равно $\mathbb{R}^n$). Тогда у нас есть операторы сужения $C_{k\infty} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\overline{\Omega}_k)$,

$C_{jk} : C(\overline{\Omega}_k) \rightarrow C(\overline{\Omega}_j), k \geq j$ (очевидно, что $C_{\infty k}, C_{jk}$ — непрерывные линейные отображения, они называются *проекциями*). Поэтому $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как *предел* пространств $C^\infty(\overline{\Omega}_k)$.

Пространство гладких функций $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Аналогичная конструкция есть и для $C^\infty(\Omega)$, где Ω — любая область в $\mathbb{R}^n$.

При этом топология в $C^\infty(\Omega)$ не зависит от выбора исчерпывающих ограниченных областей. Поскольку предел последовательности пространств Фреше есть пространство Фреше, то $C^\infty(\Omega)$ — пространство Фреше.

Сходимость в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$: последовательность $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ сходится к $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и целого неотрицательного m имеем $\|\varphi_j - \varphi\|_{C^m(K)} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$.

Пространство Л. Шварца быстро убывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Определение 4.3. Пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех быстро убывающих функций:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n : x^\alpha D^\beta \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty \right\}.$$

Оно имеет естественную структуру векторного пространства.

Пример быстро убывающей функции: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Нетрудно показать: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Фреше с нормами

$$\|\varphi\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2 \right)^{m/2} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$

Определение 4.4. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ состоит из всех финитных бесконечно дифференцируемых (основных) функций в области Ω . Оно имеет естественную структуру векторного пространства.

Напомним: $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ — носитель функции. Функция называется *финитной* в области Ω , если её $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ и компактен.

В отличие от предыдущих пространств, пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ имеет несчётную нормировку. Определим непосредственно сходимость последовательности основных функций.

СХОДИМОСТЬ В $\mathcal{D}(\Omega)$

Определение 4.5. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$

сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, если:

- существует такой компакт $K \subset \Omega$, которому принадлежат носители всех членов последовательности и предельной функции: $\text{supp } \varphi_k, \text{supp } \varphi \subset K$;
- для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $\max_{x \in K} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Очевидны вложения $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Содержание

1. Пространства основных функций
- 2. Определение и примеры обобщённых функций**
3. Простые операции над обобщёнными функциями
4. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры
5. Преобразование Фурье
6. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами

Определение обобщённых функций. Пространства обобщённых функций

Определение 4.6. Обобщённой функцией (над одним из пространств $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{D}(\Omega)$) называется всякий линейный непрерывный функционал над соответствующим пространством основных функций.

Примем обозначение: $(f, \varphi) := f(\varphi)$, f — обобщённая функция, φ — основная функция.

Пространства обобщённых функций состоят из всех обобщённых функций над данным пространством основных функций. Они имеют естественную линейную структуру.

Пространства обобщённых функций

- $C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'_0(\Omega)$ — пространство *финитных* в области Ω обобщённых функций;
 - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство обобщённых функций *медленного роста*;
 - $\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство всех обобщённых функций.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, но для пространств обобщённых функций всё наоборот: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$.

Сходимость обобщённых функций

Определение 4.7. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ (*-слабо) сходится к $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ при $k \rightarrow \infty$.

Однако, далее (в пар. про преобразование Фурье) мы внимательнее рассмотрим пространство функций медленного роста $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и определим *двойственные нормы*.

Регулярные обобщённые функции

Пусть $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ — локально суммируемая в области Ω функция. Сопоставим ей линейный функционал вида

$$(\tilde{f}, \varphi) := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Из теоремы Лебега немедленно следует непрерывность этого функционала над $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Из леммы Дюбуа-Реймона следует, что оператор $L_{1,loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ инъективен. Далее f и $\tilde{f}$ отождествляются. Обобщённые функции, которые получаются таким образом называются *регулярными*, а все остальные — *сингулярными*.

Дельта-функция Дирака

Сингулярные обобщённые функции не соответствуют никаким локально суммируемым функциям, но могут порождаться некоторыми измеримыми функциями (см. далее *главные части*). Никто не поспорит, что самая популярная сингулярная обобщённая функция — дельта-функция Дирака.

Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим функционал δ_{x^0} , действующий на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле $(\delta_{x^0}, \varphi) := \varphi(x^0)$. Его линейность и непрерывность очевидны. δ_{x^0} — дельта-функция Дирака с носителем в точке x^0 . Ещё $\delta_0 = \delta$.

Обобщённые функции, соответствующие мерам

Дельта-функцию можно определить над любым пространством, состоящим из «настоящих» функций. Этот функционал будет непрерывен в любой топологии, которая сильнее слабой (топологии поточечной сходимости). Поэтому $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$.

Следующий пример — меры. Пусть μ — счётно-аддитивная мера на сигма-алгебре борелевских подмножеств в $\mathbb{R}^n$, конечная на каждом ограниченном борелевском подмножестве. Тогда ей соответствует обобщённая функция $\rho_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующая на основные функции по формуле $(\rho_\mu, \varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x)$.

Простой слой и двойной слой

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega \in C^1$ — замкнутая гиперповерхность,
 $\rho_1, \rho_2 \in C(S)$.

- Простой слой $\rho_1 \delta_S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ действует на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле $(\rho_1 \delta_S, \varphi) := \int_S \rho_1(x) \varphi(x) ds$. Носитель $\text{supp } \rho_1 \delta_S = S$.
- Двойной слой $\rho_2 \partial_{\vec{\nu}} \delta_S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ действует на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле $(\rho_2 \partial_{\vec{\nu}} \delta_S, \varphi) := - \int_S \rho_2(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}} ds$. Носитель $\text{supp } \rho_2 \partial_{\vec{\nu}} \delta_S = S$.

Главная часть

Рассмотрим функцию $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Очевидно, она принадлежит $L_{1,loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, но не принадлежит $L_{1,loc}(\mathbb{R})$. Хотелось бы найти такую сингулярную обобщённую функцию, чтобы она при сужении на проколотую прямую $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ давала $1/x$. Такая функция существует — это главная часть $\mathcal{P}\frac{1}{x}$:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right) := \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

Содержание

1. Пространства основных функций
2. Определение и примеры обобщённых функций
- 3. Простые операции над обобщёнными функциями**
4. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры
5. Преобразование Фурье
6. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами

Умножение на гладкие функции в $\mathcal{D}'(\Omega)$

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $m \in C^\infty(\Omega)$. Тогда определим $mf \in \mathcal{D}'(\Omega)$ как функционал, действующий на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ по формуле $(mf, \varphi) := (f, m\varphi)$ (заметим, что $m\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Определение происходит из обычного умножения гладких функций на локально суммируемые. $m \cdot : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — линейный непрерывный оператор.

С умножением обобщённых функций медленного роста на гладкие функции хуже: дело в том, что из $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ не следует, что $m\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Алгебра мультипликаторов Фурье

Определим

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \left\{ t \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad t\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

— множество *мультипликаторов* Фурье в $\mathbb{R}^n$. Тогда обобщённые функции медленного роста $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ можно умножать на $t \in \mathcal{M}$ по формуле $(tf, \varphi) := (f, t\varphi)$. Некоторые свойства $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}$ — алгебра относительно естественного умножения;
- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ состоит из аналитических в $\mathbb{R}^n$ функций, растущих вместе со всеми производными не быстрее многочленов;
- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ связаны преобразованием Фурье.

Дифференцирование обобщённых функций

Из формулы интегрирования по частям следует, что для любых $f \in C^k(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (D^{\alpha} f) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^{\alpha} \varphi dx$$

для всякого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq k$. Возьмём эту формулу за основу определения производной обобщённой функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$: $(D^{\alpha} f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, D^{\alpha} \varphi)$ для любых $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Имеем $D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — линейный непрерывный оператор.

Линейные дифференциальные операторы

Определение дифференцирования для функций из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, аналогичное.

Умножение на гладкие функции и дифференцирование делают возможным рассматривать линейные дифференциальные операторы с гладкими коэффициентами (коэффициентами из алгебры мультипликаторов) как непрерывные операторы, действующие в $\mathcal{D}'(\Omega)$ (в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$): $\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u$, где $m = \text{ord } \mathcal{L}$ — порядок оператора.

Имеем для любых $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(\mathcal{L}u, \varphi) = (u, \mathcal{L}^* \varphi)$, где $\mathcal{L}^*$ — формально сопряжённый оператор, $\mathcal{L}^* \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) \varphi)$.

Замена переменных

Рассмотрим C^∞ -диффеоморфизм областей Ω и Q из $\mathbb{R}^n$

$$\theta : \Omega \rightarrow Q, \Omega \ni x \mapsto y = \theta(x) \in Q$$

(бесконечно дифференцируемая биекция, такая, что обратное отображение тоже бесконечно дифференцируемое). Для интеграла первого рода имеем

$$\int_Q f(y)\varphi(y)dy = \int_\Omega f(\theta(x)) \varphi(\theta(x)) \left| \det \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| dx,$$

где $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ — матрица Якоби отображения θ , $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$.

Замена переменных

Тогда можно определить замену переменных, от которых зависят обобщённые функции, — непрерывное линейное отображение $\circ \theta : \mathcal{D}'(Q) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — по формуле

$$\left((f \circ \theta)(x), \psi(x) \right) := \left(f(y), \left| \det \frac{\partial \theta^{-1}}{\partial y} \right| (\psi \circ \theta^{-1})(y) \right).$$

Например, если $y = Ax + b$ (A — невырожденная матрица), то $\left(f(Ax + b), \psi(x) \right) = \left(f(y), |\det A|^{-1} \psi(A^{-1}(y - b)) \right)$ (области — всё евклидово пространство).

Проблема умножения обобщённых функций.

Контрпример Л. Шварца

К сожалению, во всём $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не существует умножения обобщённых функций, которое было бы: 1) ассоциативным; 2) коммутативным; 3) с нейтральным элементом 1 (тождественной единицей); 4) дистрибутивным; 5) согласованным с умножением на гладкие функции, т.е. $\forall f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $m(fg) = (mf)g$. Говоря другими словами, в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ нельзя ввести структуру (ассоциативной и коммутативной) алгебры над кольцом $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ситуация в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ не лучше. Контрпример Л. Шварца:

$$0 = 0 \mathcal{P} \frac{1}{x} = (x\delta(x)) \mathcal{P} \frac{1}{x} = (\delta(x)x) \mathcal{P} \frac{1}{x} = \delta(x) \left(x \mathcal{P} \frac{1}{x} \right) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x).$$

Сужение обобщённой функции на открытое подмножество

Конечно, определить значение обобщённой функции в конкретной точке совершенно невозможно. Однако, можно естественно сузить обобщённую функцию на любое открытое подмножество из Ω .

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Q — открытое подмножество в Ω . Определим тогда сужение $f|_Q \in \mathcal{D}'(Q)$ следующим образом. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ рассмотрим продолжение нулём в Ω и обозначим это продолжение через $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда
$$\left(f|_Q, \varphi\right) := (f, \tilde{\varphi}).$$

Носитель обобщённой функции

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Рассмотрим объединение всех открытых подмножеств из Ω , сужение f на которые даёт нуль, то есть максимальное (по включению) открытое подмножество Q , такое, что $f|_Q = 0$.

Определение 4.8. Носителем обобщённой функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется дополнение в Ω максимального (по включению) открытого подмножества Q , сужение f на которое даёт нуль. Обозначение: $\text{supp } f$. Это замкнутое в топологии Ω множество.

Обобщённые функции с конечными носителями

Утверждение 4.1. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f$ — это конечное множество точек $x^1, \dots, x^N$. Тогда существуют целые числа $m_1, \dots, m_N \geq 0$ и вещественные числа $c_\alpha^{(j)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq m_j$,

$j = 1, \dots, N$, такие, что $f = \sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha| \leq m_j} c_\alpha^{(j)} D^\alpha \delta_{x^j}$. Другими словами,

обобщённые функции с носителем в точке получаются применением ЛДО с постоянными коэффициентами к дельта-функции с носителем в этой точке.

(доказательство **сообразите на троих**, за стаю «птичек» каждому)

Финитные обобщённые функции.

Расширение действия обобщённой функции

Обобщённая функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется финитной (в Ω), если $\text{supp } f \subset \Omega$ и компакт. Множество финитных обобщённых функций обозначается $\mathcal{D}'_0(\Omega)$. Однако, это обозначение уже зарезервировано...

Пусть $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ — два (полинормированных) пространства классических функций, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ — непрерывное вложение (например, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}_2 = C^\infty(\Omega)$). Тогда $f \in \mathcal{D}'_1$ допускает расширение над пространством $\mathcal{D}_2$, если существует обобщённая функция $F \in \mathcal{D}'_2$, такая, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}_1$ $(F, \varphi) = (f, \varphi)$.

Финитные обобщённые функции.

Расширение действия обобщённой функции

Конечно, расширение может не существовать или не быть единственным. Для единственности необходимо, чтобы вложение $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ было плотным.

Утверждение 4.2. Любая обобщённая функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ с компактным носителем может быть единственным образом расширена до обобщённой функций из $\mathcal{D}'_0(\Omega)$, т.е. до линейного непрерывного функционала над $C^\infty(\Omega)$. Наоборот, любая о.ф. $f \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$ имеет компактный носитель в Ω .

(доказательство **сообразите на троих**, за стаю «птичек» каждому)

Содержание

1. Пространства основных функций
2. Определение и примеры обобщённых функций
3. Простые операции над обобщёнными функциями
- 4. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры**
5. Преобразование Фурье
6. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами

Свёртка регулярных функций

Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ — суммируемые в n -мерном евклидовом пространстве функции. Определим их *свёртку* $f * g$ по формуле

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

Очевидно, что $f * g = g * f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Нетрудно показать (следует из неравенства

Гёльдера), что $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$,

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}.$$

Достаточные условия существования свёртки регулярных функций

Но как быть, если $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ (всего лишь локально суммируемые функции)? Для $R > 0$ рассмотрим множество

$$M_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \operatorname{supp} f, y \in \operatorname{supp} g, |x + y| \leq R\}.$$

Пусть для любого $R > 0$ множество M_R ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$, тогда существует свёртка $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$.

Например, если одна из функций f или g финитна, то свёртка $f * g$ существует.

Аппроксимация единицы

Пусть $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \int \varphi(\xi) d\xi \int f(y) g(\xi - y) dy = \int f(y) dy \int \varphi(\xi) g(\xi - y) d\xi = \\ &= \int f(y) dy \int \varphi(x + y) g(x) dx = \iint f(y) g(x) \varphi(x + y) dx dy.\end{aligned}$$

Определим *аппроксимацию единицы* следующим образом: пусть $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ — последовательность основных функций, равномерно ограниченная вместе со всеми производными в $\mathbb{R}^m$.

Она аппроксимирует единицу, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует $N = N(K) \in \mathbb{N}$, что $\eta_k(x) = 1$ для всех $k \geq N$, $x \in K$.

Идея определения свёртки обобщённых функций

Из теоремы Лебега следует, что если существует $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, то для любой аппроксимации единицы в $\mathbb{R}^{2n}$

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy.$$

Верно и обратное: если для какой-нибудь аппроксимации единицы существует предел в правой части последнего равенства, то существует свёртка функции и , а предел не зависит от выбора аппроксимации единицы. Таким образом, если определить произведение обобщённых функций от **разных** переменных, то можно определить свёртку обобщённых функций.

Тензорное произведение обобщённых функций

Определение 4.9. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ — обобщённые функции. Их *тензорным произведением* называется обобщённая функция $f \otimes g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, действующая на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ по формуле

$$\left((f \otimes g)(x, y), \varphi(x, y) \right) := \left(f(x), (g(y), \varphi(x, y)) \right) = \left(g(y), (f(x), \varphi(x, y)) \right).$$

Если $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$, то $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$, т.е. тензорное произведение есть обобщение обычного произведения локально суммируемых функций от разных переменных.

Оператор проекции

Определение основано на следующей лемме.

Лемма 4.1. Для любой $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ определён линейный и непрерывный оператор проекции $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, действующий по формуле

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \ni \varphi \mapsto \psi = (g(y), \varphi(\cdot, y)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Аналогично можно определить тензорное произведение любого (конечного) числа обобщённых функций $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}), \dots, f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_k})$.

Свойства тензорного произведения

Отметим следующие свойства тензорного произведения:

- коммутативность: для любых $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$
$$f \otimes g = g \otimes f;$$
- ассоциативность: для любых для любых $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^l)$
$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) = f \otimes g \otimes h;$$
- дистрибутивность: для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $m_1, m_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $m_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$
$$(m_1 f_1 + m_2 f_2) \otimes (m_3 g) = m_1 m_3 (f_1 \otimes g) + m_2 m_3 (f_2 \otimes g).$$

Свойства тензорного произведения

- для любой $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ линейный оператор
 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f \otimes g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

непрерывен;

- $\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) \text{ supp}(f \otimes g) = \text{supp } f \times \text{supp } g.$

Аналогичные свойства и конструкции справедливы для обобщённых функций медленного роста.

Пример 4.1. $\delta(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1) \otimes \dots \otimes \delta(x_n).$

Будем говорить, что обобщённая функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ не зависит от y , если её можно представить в виде $F(x, y) = f(x) \otimes \mathbf{1}(y)$, где $\mathbf{1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ — тождественная единица.

Свойства тензорного произведения

Такая обобщённая функция действует на основные функции

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ по правилу

$$\begin{aligned} (f(x) \otimes \mathbf{1}(y), \varphi(x, y)) &= (\mathbf{1}(y), (f(x), \varphi(x, y))) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy = \\ &= \left(f(x), \int \varphi(x, y) dy \right) \text{ (обобщение теоремы Фубини).} \end{aligned}$$

Пример 4.2. Все решения уравнения $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ имеют вид $u(x, y) = f(x) \otimes \mathbf{1}(y)$, где $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n)$ — произвольная обобщённая функция.

Определение свёртки обобщённых функций

Определение 4.10. Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ — последовательность основных функций, аппроксимирующих единицу в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ существует предел

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} ((f \otimes g)(x, y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x), (g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) \right),\end{aligned}$$

то соответствующий функционал называется *свёрткой* обобщённых функций f и g .

Достаточное условие существования свёртки

Утверждение 4.3. Если предел в правой части последнего равенства существует для какой-нибудь аппроксимации единицы, то соответствующий функционал принадлежит $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а предел не зависит от выбора аппроксимации единицы.

Для $R > 0$ и двух непустых множеств A, B рассмотрим множество

$$M_R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in A, y \in B, |x + y| \leq R \}.$$

Теорема 4.1. Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset A$, $\text{supp } g \subset B$, для любого $R > 0$ множество M_R ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда существует свёртка $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ и $\text{supp}(f * g) \subset \overline{A + B}$.

Следствие 4.1. Если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$, то существует $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Свойства свёртки

- Коммутативность: если существует $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то существует $g * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f * g = g * f$.
- Дистрибутивность (билинейность): если существуют $f_1 * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f_2 * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то для любых чисел λ_1, λ_2 существует $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 f_1 * g + \lambda_2 f_2 * g$.
- Нейтральный элемент: свёртка любой обобщённой функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с дельта-функцией существует и равна f :
 $f * \delta = \delta * f = f$.

Свойства свёртки

- Сдвиг свёртки: если существует $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то для любого $h \in \mathbb{R}^n$ существует $R_h f * g$, где R_h — оператор сдвига на вектор h , и $R_h f * g = R_h(f * g)$.
- Дифференцирование свёртки: если существует $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существуют свёртки $D^\alpha f * g, f * D^\alpha g$ и $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$.
- Если существует свёртка $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то
$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Непрерывен ли свёрточный оператор?

Очевидно, что множество обобщённых функций $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, таких, что существует свёртка $f * g$ (f фиксирована), образует линейное подпространство в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Однако, это подпространство не обязательно замкнутое в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а свёрточный оператор $g \mapsto f * g$, вообще говоря, разрывен.

Например, $\delta(x - k) \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $k \rightarrow \infty$ (проверьте), но $1 * \delta(x - k) = 1 * \delta(x) = 1$ и не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Проблема неассоциативности свёртки

Другая проблема: если $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то $(f * g) * h = f * (g * h)$. Но свёртка в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, вообще говоря, не ассоциативна: например,

$$(1 * \delta') * \theta = (1 * \delta)' * \theta = 1' * \theta = 0 * \theta = 0,$$

но, с другой стороны,

$$1 * (\delta' * \theta) = 1 * (\delta * \theta)' = 1 * \delta = 1.$$

Ключ к решению проблемы ассоциативности — три-свёртка.

Три-свёртка и решение проблемы ассоциативности

Определение 4.11. Пусть $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{3n})$ — последовательность основных функций, аппроксимирующих единицу в $\mathbb{R}^{3n}$. Тогда если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ существует предел

$$\begin{aligned} (f * g * h, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left((f \otimes g \otimes h)(x, y, z), \eta_k(x, y, z) \varphi(x + y + z) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(x), \left(g(y), \left(h(z), \eta_k(x, y, z) \varphi(x + y + z) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

то соответствующий функционал называется *3-свёрткой* обобщённых функций f, g и h .

Три-свёртка и решение проблемы ассоциативности

Определение аналогично определению 2-свёртки. Если предел существует для какой-нибудь аппроксимации единицы в $\mathbb{R}^{3n}$, то соответствующий функционал есть обобщённая функция, а предел не зависит от аппроксимации. Для 3-свёртки справедлива теорема, аналогичная теореме 4.1.

Утверждение 4.4. Пусть $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и существуют свёртки $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f * g * h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует $(f * g) * h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $(f * g) * h = f * g * h$.

Итак, если существуют бинарные свёртки и три-свёртка обобщённых функций, то свёртка ассоциативна.

Свёрточные операторы и уравнения

Свёрточные операторы и свёрточные уравнения — гениальная концепция, объединяющая все линейные уравнения с постоянными коэффициентами (дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные), а также некоторые интегральные и интегрально-дифференциальные уравнения.

Пусть $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — фиксированная обобщённая функция. Рассмотрим *свёрточный* оператор $a *$ на замкнутом (или не замкнутом) линейном подпространстве в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где этот оператор определяем, и уравнение $a * u = f$ с неизвестной обобщённой функцией u и заданной обобщённой функцией f .

Свёрточные операторы и уравнения: примеры

1) Линейное дифференциальное уравнение $\mathcal{L}u = f$, где
$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha u$$
 — линейный дифференциальный оператор

с постоянными коэффициентами, есть свёрточное уравнение вида $a_{\mathcal{L}} * u = f$, где $a_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\delta = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta$.

2) Линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами $\mathcal{R}u = f$, $(\mathcal{R}u)(x) = \sum_{j \in J} c_j u(x - x^j)$, есть свёрточное уравнение $a_{\mathcal{R}} * u = f$, $a_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\delta$.

Свёрточные операторы и уравнения: примеры

3) Линейные дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

4) Линейное интегральное уравнение Вольтерра

$$(\mathcal{K}u)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)u(y)dy = f(x), \text{ где } K \in L_{1,loc}(\mathbb{R}),$$

есть свёрточное уравнение $K * u = f$.

Определение 4.12. Пусть $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Фундаментальным решением свёрточного оператора $a *$ называется обобщённая функция $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, такая, что $a * \mathcal{E} = \delta$.

Теорема о решении свёрточного уравнения

Пусть $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — фундаментальное решение свёрточного оператора $a * \cdot$. Обозначим через $A(a, \mathcal{E})$ линейное подпространство обобщённых функций $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, для которых существует 2-свёртка $\mathcal{E} * f$ и 3-свёртка $a * \mathcal{E} * f$.

Теорема 4.2. Пусть обобщённая функция $f \in A(a, \mathcal{E})$. Тогда решение свёрточного уравнения $a * u = f$ существует, выражается формулой $u = \mathcal{E} * f$ и единственно в подпространстве $A(a, \mathcal{E})$.

Доказательство теоремы 4.2

Доказательство. 1) Проверим, что обобщённая функция $u = \mathcal{E} * f$ ($\mathcal{E} * f$ существует, потому что $f \in A(a, \mathcal{E})$) есть решение свёрточного уравнения. Имеем

$$a * u = a * (\mathcal{E} * f) = a * \mathcal{E} * f = (a * \mathcal{E}) * f = \delta * f = f.$$

2) Единственность: нужно показать, что если $u \in A(a, \mathcal{E})$, $a * u = 0$, то $u = 0$. Действительно,

$$u = u * \delta = u * (a * \mathcal{E}) = u * a * \mathcal{E} = (u * a) * \mathcal{E} = 0.$$

Свёрточные алгебры: определение

Определение 4.13. *Свёрточной алгеброй $\mathcal{A}$ называется линейное подпространство в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

- (i) для любых $f, g \in \mathcal{A}$ существует 2-свёртка $f * g \in \mathcal{A}$;
- (ii) для любых $f, g, h \in \mathcal{A}$ существует 3-свёртка $f * g * h \in \mathcal{A}$;
- (iii) нейтральный элемент $\delta \in \mathcal{A}$.

Замечание: свёрточная алгебра $\mathcal{A}$ может быть замкнутым подпространством в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а может и не быть таковым (см. далее).

Свёрточные алгебры: примеры

Если $\mathcal{A}$ — свёрточная алгебра, то теорема 4.2 формулируется следующим образом. Пусть обобщённые функции $a, f \in \mathcal{A}$, существует фундаментальное решение свёрточного оператора a^* , принадлежащее алгебре: $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$. Тогда решение свёрточного уравнения $a^* u = f$ существует, выражается формулой $u = \mathcal{E} * f$ и единственно в алгебре $\mathcal{A}$.

1) Свёрточная алгебра ЛДО с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{A}_{\text{LDO}} = \left\{ a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \text{supp } a = \{0\} \right\}.$$

2) Свёрточная алгебра линейных дифференциально-разностных операторов с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{A}_{\text{LDDO}} = \left\{ a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \#\text{supp } a < \infty \right\}.$$

Свёрточные алгебры: примеры

3) Свёрточная алгебра финитных обобщённых функций $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$.

4) Свёрточная алгебра

$$\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \exists c \in \mathbb{R} \text{ supp } a \subset [c, +\infty)\}$$

(существование свёрток следует из теоремы 4.1).

Множество $C \subset \mathbb{R}^n$ называется *конусом*, если для любых $x \in C$, $\lambda > 0$ $\lambda x \in C$. Конус $C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in C (\xi, x) \geq 0\}$

называется сопряжённым к конусу C . C^* — замкнутый выпуклый конус, $(C^*)^* = \overline{\text{Conv } C}$ (Conv — выпуклая оболочка множества).

Свёрточная алгебра относительно конуса

Конус $C \subset \mathbb{R}^n$ называется *острым*, если существует гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, такая, что $\Pi \cap \overline{\text{Conv } C} = \{0\}$ (или, что эквивалентно, $\text{int } C^* \neq \emptyset$).

Утверждение 4.5. Пусть C — замкнутый выпуклый острый конус. Тогда

$$\mathcal{D}'_{C+}(\mathbb{R}^n) = \left\{ a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компакт, } \text{supp } a \subset C + K \right\}$$

есть свёрточная алгебра и для любой $a \in \mathcal{D}'_{C+}(\mathbb{R}^n)$ свёрточный оператор $f \mapsto a * f$ непрерывен в $\mathcal{D}'_{C+}(\mathbb{R}^n)$.

Примеры: $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'_{\{0\}+}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'_{[0,\infty)+}(\mathbb{R}^n)$.

Свёртка и трансляционно-инвариантные операторы

Рассмотрим линейный оператор $L : \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Он называется *трансляционно-инвариантным*, если для любого $h \in \mathbb{R}^n$ и любой $u \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ имеем $(Lu)(x+h) = Lu(x+h)$, т.е. $LR_h = R_hL$, где R_h — оператор сдвига.

Теорема 4.3. Пусть $L : \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — линейный непрерывный трансляционно-инвариантный оператор. Тогда он свёрточный, то есть существует единственная о.ф. $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, что для любой $u \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ $Lu = a * u$.

Содержание

1. Пространства основных функций
2. Определение и примеры обобщённых функций
3. Простые операции над обобщёнными функциями
4. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры
- 5. Преобразование Фурье**
6. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами

О пространстве быстро убывающих функций

Пространство Л. Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Фреше с нормами

$$\|\varphi\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{m/2} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Очевидно, нормы согласованы: $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \dots$ для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ — пополнение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ относительно m -ой нормы. Это банахово пространство. Очевидны вложения $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n) \supset \dots$. Несложно доказать, что каждое вложение компактно и всюду плотно.

О пространстве быстро убывающих функций

Оказывается, пространства $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ можно описать вполне явным образом.

Утверждение 4.6.

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^m(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq m, |x|^m D^\alpha u(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty \right\}.$$

Можно определить $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как бесконечное пересечение банаховых пространств $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n), \dots$. Оно не будет банаховым, но будет полным, т.е. будет пространством Фреше.

Обобщённые функции медленного роста

Определение 4.14. *Обобщённой функцией медленного роста* называется всякий линейный непрерывный функционал над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех обобщённых функций медленного роста. Сходимость в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ определяется аналогично сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (*-слабая сходимость).

Теорема 4.4 (Л. Шварц). Пусть $M \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — *-слабо ограниченное множество. Тогда существует $C > 0$ и $m \in \mathbb{Z}_+$, такие, что $\forall f \in M$ и $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad |(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_m$.

Порядок обобщённой функции медленного роста

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n) \supset \dots \Rightarrow \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'_1(\mathbb{R}^n) \subset \dots$$

Из теоремы 4.4 есть одно важное следствие.

Следствие 4.2 (о порядке о.ф. медленного роста). Всякая обобщённая функция медленного роста имеет конечный порядок, то есть допускает расширение до функционала $f \in \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$; наименьшее m называется *порядком* f и обозначается $\text{ord } f$. При этом

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad |(f, \varphi)| \leq \|f\|_{-m} \|\varphi\|_m,$$

где $\|f\|_{-m}$ — норма функционала $f \in \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$.

Преобразование Фурье быстро убывающих функций

Для функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ определено *преобразование Фурье*:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\xi \cdot x} dx. \quad (4.1)$$

Здесь нет нормировочного множителя $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$. Он нужен для того, чтобы преобразование Фурье было унитарным оператором $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$. Без этого множителя выходит, что для любых $u, v \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{F}[u], \mathcal{F}[v])_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^n (u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Замечание: $L_2(\mathbb{R}^n)$ — комплексное гильбертово пространство.

Обратное преобразование Фурье

Поскольку $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (-ix)^\alpha e^{-\xi \cdot x} dx = \mathcal{F} [(-ix)^\alpha \varphi](\xi). \text{ Наоборот,}$$

преобразование Фурье производной $\mathcal{F} [D^\alpha \varphi](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$.

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} [\psi(-\xi)](x). \quad (4.2)$$

Утверждение 4.7. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ есть линейный топологический изоморфизм.

Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста

Определение 4.15. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — обобщённая функция медленного роста. Тогда её преобразование Фурье есть о.ф. медленного роста $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, действующая на быстро убывающие функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(\mathcal{F}[f], \varphi) := (\varphi, \mathcal{F}[f]). \quad (4.3)$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[g(-\xi)].$$

Утверждение 4.8. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ суть линейный топологический изоморфизм.

Свойства преобразования Фурье

Пример: $\mathcal{F} \left[\delta (x - x^0) \right] (\xi) = e^{-i\xi \cdot x^0}$. Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{S} (\mathbb{R}^n)$

$$\left(\mathcal{F} \left[\delta (x - x^0) \right], \varphi \right) = \left(\delta (x - x^0), \mathcal{F}[\varphi] \right) = \int \varphi(\xi) e^{-i\xi \cdot x^0} d\xi.$$

1) Дифференцирование преобразования Фурье: для любой $f \in \mathcal{S}' (\mathbb{R}^n)$ $D^\alpha \mathcal{F}[f] = \mathcal{F} [(-ix)^\alpha f]$.

2) Преобразование Фурье производной: для любой $f \in \mathcal{S}' (\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F} [D^\alpha f] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f]$.

Свойства преобразования Фурье

- 3) Сдвиг преобразования Фурье: для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,
любого $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}[f](\xi + \xi^0) = \mathcal{F}\left[e^{-i\xi^0 \cdot x} f\right]$.
- 4) Преобразования Фурье сдвига: для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,
любого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}\left[f(x + x^0)\right] = e^{i \cdot x^0 \cdot \xi} \mathcal{F}[f]$.
- 5) Преобразование Фурье тензорного произведения: для любых
 $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F}_{x,y}\left[f(x) \otimes g(y)\right] = \mathcal{F}_x[f] \otimes \mathcal{F}_y[g]$,
 $\mathcal{F}_x\left[f(x) \otimes g(y)\right] = \mathcal{F}_x[f] \otimes g(y)$.

Преобразование Фурье свёртки

6) Преобразование Фурье финитной обобщённой функции: пусть $f \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ и представляется в виде

$$\mathcal{F}[f](\xi) = (f(x), \eta(x)e^{-i\xi \cdot x}),$$

где $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta(x) = 1$, если $x \in U(\text{supp } f)$ (окрестности носителя f).

Теорема 4.5. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда их свёртка $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и преобразование Фурье свёртки есть

произведение преобразований Фурье сомножителей:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].$$

Преобразование Фурье свёртки: доказательство

Доказательство. Когда один из сомножителей (например, функция g) — финитная обобщённая функция, свёртку можно искать в виде $((f * g)(x), \varphi(x)) = \left(f(x), (g(y), \eta(y)\varphi(x + y)) \right)$, где $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta(y) = 1$, если $y \in U(\text{supp } g)$. Учитывая это, имеем

$$(\mathcal{F}[f * g], \varphi) = (f * g, \mathcal{F}[\varphi]) = \left(f(x), (g(y), \eta(y)\hat{\varphi}(x + y)) \right).$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{F}[g] \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, преобразуем далее:

Преобразование Фурье свёртки: доказательство

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}[f * g], \varphi) &= (f * g, \mathcal{F}[\varphi]) = \left(f(x), \left(g(y), \eta(y) \hat{\varphi}(x + y) \right) \right) = \\ &= \left(f(x), \left(g(y), \eta(y) \int \varphi(\xi) e^{-i(x+y) \cdot \xi} d\xi \right) \right) = \\ &= \left(f(x), \int \left(g(y), \eta(y) e^{-iy \cdot \xi} \right) \varphi(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi \right) = \left(f(x), \mathcal{F} [\mathcal{F}[g] \varphi] \right) = \\ &= (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \varphi) = (\mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g], \varphi), \text{ что и требовалось.} \end{aligned}$$

Содержание

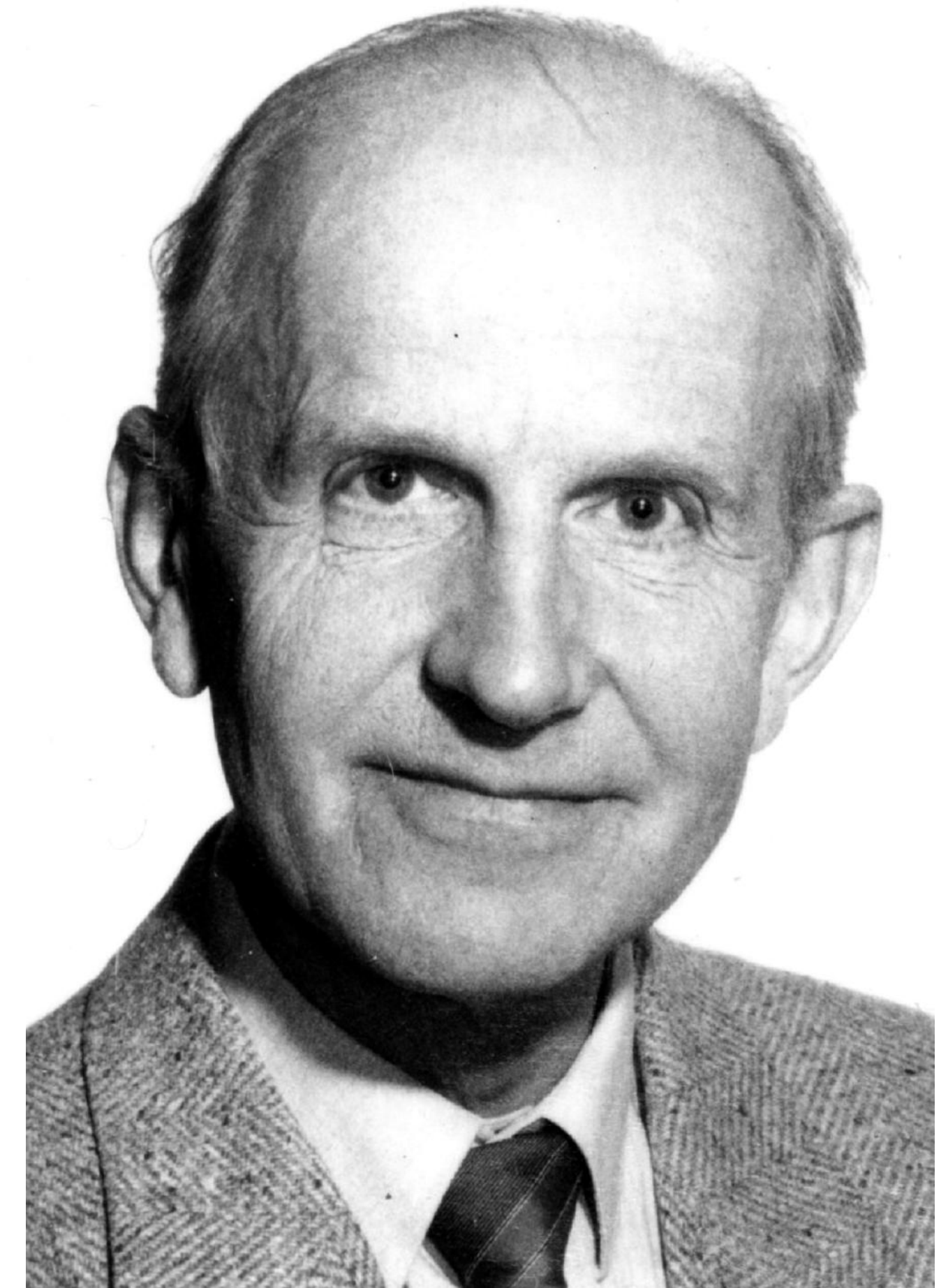
1. Пространства основных функций
2. Определение и примеры обобщённых функций
3. Простые операции над обобщёнными функциями
4. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры
5. Преобразование Фурье
- 6. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами**

Теорема Хёрмандера

Теорема 4.6. Пусть

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} D^{\alpha}$$

— линейный дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами. Тогда существует $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — фундаментальное решение медленного роста оператора $\mathcal{L}$, т.е. $\mathcal{L}E = \delta$.



Lars Hörmander (1931 — 2012)

Фундаментальное решение 1D линейного дифференциального оператора

Утверждение 4.9. Фундаментальное решение $\mathcal{E} \in \mathcal{S}'[0, +\infty)$ (т.е. $\mathcal{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\text{supp } \mathcal{E} = [0, +\infty)$) линейного дифференциального оператора

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dt^m} + c_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + c_m$$

с постоянными коэффициентами имеет вид $\mathcal{E}(t) = X(t)\theta(t)$, где θ — функция Хевисайда, а X — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}X = 0, t > 0, \\ X(0) = 0, X'(0) = 0, \dots, X^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Построим фундаментальное решение оператора теплопроводности $\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u$, $a > 0$ — постоянный параметр, $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$ — оператор Лапласа относительно пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$. Оператор теплопроводности имеет параболический тип. Запишем уравнение, которому удовлетворяет фундаментальное решение $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R})$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E = \delta(x, t) = \delta(x) \otimes \delta(t). \quad (4.4)$$

Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Пусть $\hat{E}(\xi, t) = \mathcal{F}_x [E(x, t)]$ — фурье-образ фундаментального решения. Получим для него уравнение, применив к уравнению (4.4) преобразование Фурье по переменным $x_1, \dots, x_n$:

$$\mathcal{F}_x \left[\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E \right] = \mathcal{F}_x [\delta(x)] \otimes \delta(t) = 1(\xi) \otimes \delta(t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} - a^2 \mathcal{F}_x [\Delta E] = 1(\xi) \otimes \delta(t). \text{ Учтём формулу преобразования}$$

Фурье производной $\mathcal{F} [D^\alpha u] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[u]$:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \hat{E} = 1(\xi) \otimes \delta(t). \quad (4.5)$$

Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\hat{E}$ с переменной t и векторным параметром $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если параметр ξ фиксировать, то (4.5) по сути будет уравнением для фундаментального решения 1D оператора $\frac{\partial}{\partial t} + a^2 |\xi|^2$:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \hat{E} = \delta(t). \text{ Согласно утверждению 4.9 } \hat{E}(\xi, t) = X(\xi, t)\theta(t),$$

где X — решение задачи Коши

$$\begin{cases} X_t + a^2 |\xi|^2 X = 0, t > 0, \\ X|_{t=0} = 1; \end{cases} \Rightarrow X(\xi, t) = e^{-a^2 |\xi|^2 t} \Rightarrow \hat{E}(\xi, t) = e^{-a^2 |\xi|^2 t} \theta(t).$$

Фундаментальное решение оператора теплопроводности

Найдём само фундаментальное решение: $E(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\hat{E}(\xi, t) \right] =$

$$= \theta(t) \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 |\xi|^2 t} e^{ix \cdot \xi} d\xi =$$

$$= \left\{ -a^2 |\xi|^2 t + ix \cdot \xi = -a^2 t \left(\xi - \frac{ix}{2a^2 t} \right)^2 - \frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \cdot$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(a\sqrt{t}\xi - \frac{ix}{2a\sqrt{t}} \right)^2} d\xi = \left\{ \eta = a\sqrt{t}\xi - \frac{ix}{2a\sqrt{t}}, d\xi = \frac{d\eta}{\left(a\sqrt{t} \right)^n} \right\} =$$

Фундаментальное решение оператора теплопроводности

$$= \frac{\theta(t)}{\left(2\pi a\sqrt{t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

Отметим некоторые свойства фундаментального решения оператора теплопроводности:

- $\text{supp } E = \{t \geq 0\}$;
- $E(x, t) \rightarrow \delta(x)$ при $t \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$;
- $E \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$;
- $E \in C^\infty(t > 0)$.

Метод спуска построения фундаментального решения

Почему теорему 4.6 сложно доказать? Пусть $\mathcal{L}E = \delta$, применим преобразование Фурье: $P(i\xi)\hat{E}(\xi) = 1$, где P — символ оператора $\mathcal{L}$.
 $\hat{E}(\xi) = \frac{1}{P(i\xi)}$? Пример: $\mathcal{L} = \frac{d}{dx} \Rightarrow \hat{E}(\xi) = \frac{1}{\xi}$?

Рассмотрим линейные дифференциальные операторы $L_0, \dots, L_m$ с постоянными коэффициентами относительно переменных $(x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$ и ЛДО $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентам относительно переменных $(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ вида

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial z^k}.$$

Метод спуска построения фундаментального решения

Определение 4.16. Обобщённая функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ допускает расширение действия на функции вида $\varphi(x)1(z)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если для любой аппроксимации единицы $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует не зависящий от неё предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(u(x, z), \varphi(x)\eta_j(z) \right) = \left(u(x, z), \varphi(x)1(z) \right).$$

Обозначим предел в определении 4.16 через $\int_{-\infty}^{\infty} u(\cdot, z)dz \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Если функция $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеет то свойство, что для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $u(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R})$, то u допускает расширения действия на функции $\varphi(x)1(z)$, причём указанный выше интеграл имеет обычный смысл.

Метод спуска построения фундаментального решения

Теорема 4.7. Пусть $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ уравнение $\mathcal{L}u = f(x) \otimes 1(z)$ допускает расширение на функции $\varphi(z)1(z)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда обобщённая функция $u_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(\cdot, z)dz \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ есть решение уравнения $L_0 u_0 = f$.

В частности, если $f(x) = \delta(x)$, $E = E(x, z)$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$, удовлетворяющее условиям теоремы 4.7, то $\int_{-\infty}^{\infty} E(\cdot, z)dz$ есть фундаментальное решение оператора L_0 .

Фундаментальное решение волнового оператора

Построим фундаментальное решение **волнового оператора**
 $\square_a u = u_{tt} - a^2 \Delta u$, $a > 0$ — постоянный параметр (скорость волн), $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$ — оператор Лапласа относительно пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$. Волновой оператор имеет *гиперболический тип*. Запишем уравнение, которому удовлетворяет фундаментальное решение $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R})$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2 \Delta E = \delta(x, t) = \delta(x) \otimes \delta(t). \quad (4.6)$$

Фурье-образ фундаментального решения волнового оператора

Получим уравнение для фурье-образ фундаментального решения $\hat{E}(\xi, t) = \mathcal{F}_x [E(x, t)]$ волнового оператора, применив к уравнению (4.6) преобразование Фурье по переменным $x_1, \dots, x_n$:

$$\mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2 \Delta E \right] = \mathcal{F}_x [\delta(x)] \otimes \delta(t) = 1(\xi) \otimes \delta(t) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} - a^2 \mathcal{F}_x [\Delta E] = 1(\xi) \otimes \delta(t). \text{ Учтём свойство } \mathcal{F} [D^\alpha u] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F} [u]:$$
$$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \hat{E} = 1(\xi) \otimes \delta(t). \quad (4.7)$$

Фурье-образ фундаментального решения волнового оператора

Имеем ОДУ второго порядка относительно $\hat{E}$ с переменной t и векторным параметром $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если параметр ξ фиксировать, то (4.7) будет уравнением для фундаментального решения 1D оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2$:

$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \hat{E} = \delta(t)$. Из утверждения 4.9 $\hat{E}(\xi, t) = X(\xi, t)\theta(t)$, где

$$\begin{cases} X_t + a^2 |\xi|^2 X = 0, t > 0, \\ X|_{t=0} = 0, X_t|_{t=0} = 1; \end{cases} \Rightarrow X(\xi, t) = \frac{\sin(a |\xi| t)}{a |\xi|} \Rightarrow$$

$$\hat{E}(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin(a |\xi| t)}{a |\xi|}.$$

Фундаментальное решение волнового оператора

$$E(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\hat{E}(\xi, t) \right] = \theta(t) \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\frac{\sin(a |\xi| t)}{a |\xi|} \right] = ?$$

$$\frac{\sin(a |\xi| t)}{a |\xi|} \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \frac{\sin(a |\xi| t)}{a |\xi|} \notin L_p(\mathbb{R}^n) \text{ при } t > 0, 1 \leq p < \infty.$$

- $n = 1 \Rightarrow E_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|);$
- $n = 2 \Rightarrow E_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}};$
- $n = 3 \Rightarrow E_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x),$ где $\delta_{S_{at}} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ — простой слой на сфере $|x| = at$ с единичной плотностью.

Фундаментальное решение волнового оператора с одной пространственной переменной

Найдём обратное преобразование Фурье:

$$E(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\theta(t) \frac{\sin a\xi t}{a\xi} \right] = \frac{1}{2\pi} \theta(t) \mathcal{F}_\xi \left[\frac{a \sin \xi t}{a\xi} \right]. \text{ Мы не}$$

можем найти его через интеграл, потому что $\frac{\sin a\xi t}{a\xi} \notin L_p(\mathbb{R})$

ни при каких $p \in [1, \infty)$ и $t \neq 0$. Поэтому найдём его по определению:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a\xi t}{a\xi} \right], \varphi \right) &= \left(\frac{a \sin \xi t}{a\xi}, \mathcal{F}_\xi[\varphi(x)] \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin a\xi t}{a\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin a\xi t}{a\xi} e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\xi t}{a\xi} e^{i\xi x} d\xi = \end{aligned}$$

Фундаментальное решение волнового оператора с одной пространственной переменной

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}}{a\xi} e^{i\xi x} d\xi = \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x+at)} - e^{i\xi(x-at)}}{a\xi} d\xi = \\
 &= \frac{1}{2ia} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) (i\pi \text{sign}(x+at) - i\pi \text{sign}(x-at)) dx = \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \theta(at - |x|) \varphi(x) dx. \text{ Следовательно,}
 \end{aligned}$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \text{ supp } E(x, t) = \{ |x| \leq at \}.$$

Принцип Гюйгенса—Френеля

$E_3(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{E}_3(\xi, t) \right]$. Вспомним, что $\mathcal{F}[f](\xi) = (f(x), \eta(x)e^{i(\xi, x)})$

— преобразование Фурье финитной обобщённой функции. *Принцип Гюйгенса—Френеля* подсказывает способ найти фундаментального решения.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\delta_{S_R} \right](\xi) &= \left(\delta_{S_R}(x), \eta(x)e^{i(\xi, x)} \right) = \int_{S_R} \eta(x)e^{i(\xi, x)} d\sigma_x = \\ &= \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi e^{i|\xi|R \cos \theta} R^2 \sin \theta d\theta = -2\pi R^2 \int_0^\pi e^{i|\xi|R \cos \theta} d \cos \theta = \{\mu = \cos \theta\} = \\ &= 2\pi R^2 \int_{-1}^1 e^{i|\xi|R \mu} d\mu = 4\pi R^2 \frac{e^{i|\xi|R \mu}}{2i|\xi|R} \Big|_{-1}^1 = 4\pi R^2 \frac{\sin |\xi|R}{|\xi|R}. \end{aligned}$$

Фундаментальное решение волнового оператора с тремя пространственными переменными

Отсюда $\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(R|\xi|)}{R|\xi|} \right] = \frac{1}{4\pi R^2} \delta_{S_R}(x)$. Следовательно,

$$E(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[t\theta(t) \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|t} \right] = t\theta(t) \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \delta_{S_{at}}(x).$$

Окончательно фундаментальное решение 3D волнового оператора (с тремя пространственными переменными) есть

$$E_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \text{ — сингулярная о.ф. медленного роста.}$$

Фундаментальное решение волнового оператора с двумя пространственными переменными

Получим фундаментальное решение методом спуска:

$$x_3 = \sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2};$$

$$(E_2(x_1, x_2, t), \varphi(x_1, x_2, t)) = (E_3(x_1, x_2, x_3, t), \varphi(x_1, x_2, t)1(x_3)) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty dt \int_{S_{at}} \varphi(x_1, x_2, t) d\sigma_x = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^\infty dt \iint_{x_1^2 + x_2^2 < a^2 t^2} \varphi(x_1, x_2, t)$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2} dx_1 dx_2 =$$

Фундаментальное решение волнового оператора с двумя пространственными переменными

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^\infty dt \iint_{x_1^2 + x_2^2 < a^2 t^2} \varphi(x_1, x_2, t) \frac{a}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_1 dx_2 = \\
 &= \iiint \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \varphi(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 dt \Rightarrow \\
 E_2(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}.
 \end{aligned}$$

