

Линейные гиперболические 2D уравнения второго порядка

Задача 5.1. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy} + u_x + u u_y + (y - 1)u = 0. \quad (1)$$

Решение. Уравнение имеет гиперболический тип и представлено в каноническом виде. Его можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_y + u) + y (u_y + u) - u = 0.$$

Введём ещё одну неизвестную функцию $v = u_y + u$. Тогда $v_x + yv - u = 0$ или $u = v_x + yv$. Система двух линейных уравнений первого порядка (с двумя неизвестными функциями)

$$\begin{cases} u = v_x + yv, \\ v = u_y + u \end{cases} \quad (2)$$

эквивалентна уравнению (1) в том смысле, что если функция $u = u(x, y)$ есть решение уравнения (1), то она удовлетворяет системе (2), и наоборот. Из системы (2) следует уравнение относительно функции v вида

$$v_{xy} + yv_y + v_x + yv = 0. \quad (3)$$

К счастью, оператор уравнения (3) немедленно допускает декомпозицию

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} + y = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + 1 \right),$$

тогда как оператор $\mathcal{L}$ уравнения (1) в виде композиции операторов первого порядка не представляется (доказывать это сильно утверждение мы, конечно, не будем). Ядро ЛДО третьего порядка

$$\mathcal{M} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + 1 \right)^{\circ 2}$$

(т. е. пространство решений уравнения $\mathcal{M}v = 0$) включает ядро оператора $\mathcal{L}$. Найдём ядро оператора $\mathcal{M}$.

Уравнение относительно функции $w = v_y + v$ есть

$w_x + yw = 0$, а его общее решение $w = \tilde{c}_1(y)e^{-xy}$, где

$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(y)$ — произвольная функция. Общее решение уравнения $v_y + v = \tilde{c}_1(y)e^{-xy}$ будем искать в виде

$v = \tilde{c}_2(x, y)e^{-y}$. Подстановка приводит к уравнению

$\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial y} e^{-y} = \tilde{c}_1(y)e^{-xy}$ или $\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial y} = c_1(y)e^{-xy}$, где функция

$c_1(y) = \tilde{c}_1(y)e^y$ также произвольна, никаких ограничений на

неё нет. Отсюда $\tilde{c}_2(y) = \int_0^y c_1(s)e^{-xs}ds + c_2(x)$, где $c_2 = c_2(x)$

— произвольная функция на прямой, и

$$v = e^{-y} \int_0^y c_1(s)e^{-xs}ds + e^{-y}c_2(x).$$

Наконец, уравнение для u имеет вид

$$u_y + u = e^{-y} \int_0^y c_1(s)e^{-xs}ds + e^{-y}c_2(x)$$

и допускает решение вида $u = \tilde{c}_3(x, y)e^{-y}$, где

$\frac{\partial \tilde{c}_3}{\partial y} = \int_0^y c_1(s)e^{-xs}ds + c_2(x)$. Интегрирование последнего

уравнения и необходимые преобразования (изменение порядка интегрирования в повторном интеграле) дают

$$\tilde{c}_3 = \int_0^y dt \int_0^t c_1(s)e^{-xs}ds + c_2(x)y + c_3(x) = \int_0^y c_1(s)(y-s)e^{-xs}ds + c_2(x)y + c_3(x).$$

Таким образом, ядро оператора $\mathcal{M}$ составляют все функции вида

$$u = e^{-y} \int_0^y c_1(s)(y-s)e^{-xs} ds + c_2(x)e^{-y}y + e^{-y}c_3(x), \quad (4)$$

где c_1, c_2, c_3 — три произвольные независимые функции.

Найдём соотношения для функций c_1, c_2 и c_3 , определяющие ядро оператора $\mathcal{L}$. Можно подставить выражение (4) непосредственно в уравнение (1), однако гораздо удобнее сделать подстановку в эквивалентную систему (2). Второе уравнение этой системы выполнено автоматически.

Обратимся к правой части первого уравнения:

$$v_x + yv = e^{-y} \int_0^y c_1(s)(y-s)e^{-xs} ds + c_2(x)e^{-y}y + e^{-y}c'_2(x).$$

Сравнение последнего выражения с выражением (4) показывает, что единственное определяющее соотношение для $\ker \mathcal{L}$ есть $c_3(x) = c'_2(x)$.

Ответ: $u = e^{-y} \int_0^y c_1(s)(y-s)e^{-xs} ds + c_2(x)e^{-y}y + e^{-y}c'_2(x).$

Задача 5.2. Решить задачу Гурса

$$\begin{cases} u_{xy} + u_x = x, & x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = y^2, & u|_{y=0} = x^2. \end{cases}$$

Решение. Получим общее решение уравнения.

1) Частное решение уравнения есть функция $u_* = \frac{x^2}{2}$.

2) u^0 — общее решение однородного уравнения

$$u_{xy}^0 + u_x^0 = 0.$$

Обозначим $u_x^0 = v$. Уравнение относительно функции v

$$v_y + v = 0$$

имеет общее решение $v = c(x)e^{-y}$. Отсюда $u_x^0 = c(x)e^{-y}$, $u^0 = e^{-y}f(x) + g(y)$, где f — некоторая первообразная функции c , f, g — произвольные независимые функции класса C^2 . Итак, общее решение уравнения решаемой задачи имеет вид

$$u = e^{-y}f(x) + g(y) + \frac{x^2}{2}.$$

Замечание. $K_0 : C^2(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^2(\mathbb{R}^2)$ — разрешающий оператор, но его ядро $\ker K_0 = \{(C, -Ce^{-y}) : C \in \mathbb{R}\}$ нетривиально.

Подставим общее решение в условия Гурса. Имеем

$$\begin{cases} e^{-y}f(0) + g(y) = y^2, \\ f(x) + g(0) + \frac{x^2}{2} = x^2. \end{cases}$$

Пусть $f(0) = -g(0) = C$. Тогда $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$,

$g(y) = y^2 - Ce^{-y}$. Подставим эти функции в общее решение уравнения:

$$u = e^{-y} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) + y^2 - Ce^{-y} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} (e^{-y} + 1) + y^2.$$

Ответ: $u = \frac{x^2}{2} (e^{-y} + 1) + y^2$.

Задача 5.3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \\ u|_{y=0} = x^2 - 1, \quad u_y|_{y=0} = 2x. \end{cases}$$

Решение. $\gamma = \{y = 0\}$ — начальная кривая, оба условия трансверсальности выполнены:

- характеристики уравнения трансверсальны γ ;
- направление дифференцирования трансверсально кривой γ .

Приведём уравнение ко второму каноническому виду.

Уравнение характеристик имеет вид $dy^2 - dx^2 = 0 \Rightarrow d(y - x) = 0$ или $d(y + x) = 0 \Rightarrow y - x = C_1, y + x = C_2$;

каноническая замена есть

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = y + x. \end{cases}$$

Вычисляем производные: $u_x = -u_\xi + u_\eta, u_y = u_\xi + u_\eta$,

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Второй канонический вид: $u_{\xi\eta} - u_\eta = 0$.

Находим общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} u_\eta = v &\Rightarrow v_\xi - v = 0 \Leftrightarrow v = C(\eta)e^\xi \Rightarrow u_\eta = C(\eta)e^\xi \Leftrightarrow u = \tilde{f}(\xi) + \tilde{g}(\eta)e^\xi \Rightarrow \\ u &= \tilde{f}(y-x) + \tilde{g}(x+y)e^{y-x} = f(x-y) + g(x+y)e^{-2x} \Rightarrow u_y = -f'(x-y) + g'(x+y)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Подстановка в начальные условия даёт систему для неизвестных функций:

$$\begin{cases} f(x) + g(x)e^{-2x} = x^2 - 1, \\ -f'(x) + g'(x)e^{-2x} = 2x. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение системы:

$$f'(x) + g'(x)e^{-2x} - 2g(x)e^{-2x} = 2x. \text{ Отсюда}$$

$$2f'(x) - 2g(x)e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow g(x)e^{-2x} = f'(x) \Rightarrow f'(x) + f(x) = x^2 - 1.$$

Ищем решение в виде $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Имеем систему для неопределённых коэффициентов A, B, C :

$$\begin{cases} A = 1, \\ B + 2A = 0, \\ C + B = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$,

$g(x) = f'(x)e^{2x} = 2(x - 1)e^{2x}$. Итак, решение задачи Коши для гиперболического уравнения имеет вид

$$u = (x - y - 1)^2 + 2(x + y - 1)e^{2(x+y)}e^{-2x} = (x - y - 1)^2 + 2(x + y - 1)e^{2y}.$$

Ответ: $u = (x - y - 1)^2 + 2(x + y - 1)e^{2y}$.

Задача 5.4. Построить функцию Римана гиперболического

оператора $\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x + y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ в области $x > 0$, $y > 0$.

Решение. Формально сопряжённый оператор имеет вид

$$\mathcal{L}^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x + y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{x + y} \right).$$

Найдём общее решение уравнения $\mathcal{L}^*v = 0$. Сделаем замену

$v = (x + y)w$. Имеем $v_x = w + (x + y)w_x$,

$v_{xy} = w_y + w_x + (x + y)w_{xy}$. Уравнение относительно w есть

$$(x + y)w_{xy} + w_x + w_y - w_x - w_y = 0$$

или $w_{xy} = 0$. Отсюда $w = f(x) + g(y)$, $v = (x + y)(f(x) + g(y))$,

где f, g — две произвольные независимые функции класса C^2 .

Функция Римана $R = R(t, s, x, y)$ есть решение задачи Гурса

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R}{t + s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R}{t + s} \right) = 0, \\ R|_{t=x} = e^{\int_y^s \frac{d\xi}{x + \xi}} = e^{\ln \frac{x+s}{x+y}} = \frac{x+s}{x+y}, \\ R|_{s=y} = e^{\int_x^t \frac{d\xi}{\xi + y}} = e^{\ln \frac{t+y}{x+y}} = \frac{t+y}{x+y}, \end{cases}$$

в которой x, y следует считать положительными параметрами.

Подстановка общего решения $R = (t + s)[f(t; x, y) + g(s; x, y)]$

в условия Гурса даёт

$$\begin{cases} (x+s)[f(x; x, y) + g(s; x, y)] = \frac{x+s}{x+y}, \\ (t+y)[f(t; x, y) + g(y; x, y)] = \frac{t+y}{x+y} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x; x, y) + g(s; x, y) = \frac{1}{x+y}, \\ f(t; x, y) + g(y; x, y) = \frac{1}{x+y}. \end{cases}$$

Поскольку функция f (функция g) определена с точностью до прибавления (вычитания) произвольной функции $C(x, y)$, положим $f(x; x, y) = 0$. Тогда $g(s; x, y) = \frac{1}{x+y}$, $f(t; x, y) = 0$.

Ответ: $R(t, s; x, y) = \frac{t+s}{x+y}$.

Задача 5.5. Построить функцию Римана оператора с постоянными коэффициентами: $\mathcal{L}u = u_{xy} + au_x + bu_y + cu$, $a, b, c = \text{const}$.

Решение. Сделаем замену $u = e^{\alpha x + \beta y} v$, где v — новая неизвестная функция: $u_x = e^{\alpha x + \beta y} v_x + \alpha e^{\alpha x + \beta y} v$,

$$u_y = e^{\alpha x + \beta y} v_y + \beta e^{\alpha x + \beta y} v,$$

$$u_{xy} = e^{\alpha x + \beta y} v_{xy} + \beta e^{\alpha x + \beta y} v_x + \alpha e^{\alpha x + \beta y} v_y + \alpha \beta e^{\alpha x + \beta y} v \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}u = e^{\alpha x + \beta y} \left(v_{xy} + (a + \beta)v_x + (b + \alpha)v_y + (c + a\alpha + b\beta + \alpha\beta)v \right).$$

Уничтожим производные первого порядка: $\alpha = -b$, $\beta = -a$.

Оператор примет вид

$$\mathcal{L}u = e^{-bx - ay} \left(v_{xy} + (c - ab - ab + ab)v \right) \Rightarrow \text{рассмотрим}$$

оператор $\mathcal{M}v = v_{xy} - \lambda v$, где $\lambda = ab - c$.

1) $\lambda = c - ab = 0 \Rightarrow R_{\mathcal{M}} = 1$. Отсюда

$$R_{\mathcal{L}}(x, y, x_0, y_0) = e^{-b(x-x_0)-a(y-y_0)}.$$

2) $\lambda = c - ab \neq 0$. Будем искать функцию Римана оператора

$$\mathcal{M} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda \text{ в виде } R_{\mathcal{M}} = r((x - x_0)(y - y_0)).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_{\mathcal{M}}}{\partial x \partial y} - \lambda R_{\mathcal{M}} = 0, \\ R_{\mathcal{M}} \Big|_{x=x_0} = 1, \\ R_{\mathcal{M}} \Big|_{y=y_0} = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Предположив аналитичность функции r в окрестности нуля, будем искать решение задачи (5) в виде ряда

$$R_{\mathcal{M}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k (y - y_0)^k. \text{ Условия Гурса выполнены}$$

автоматически. Имеем

$$\frac{\partial^2 R_{\mathcal{M}}}{\partial x \partial y} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^2 (x - x_0)^{k-1} (y - y_0)^{k-1} = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} (k+1)^2 (x - x_0)^k (y - y_0)^k.$$

Подстановка ряда для функции Римана в уравнение

$$\mathcal{M}_{x,y}^* R_{\mathcal{M}} = 0 \text{ даёт}$$

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} (k+1)^2 (x - x_0)^k (y - y_0)^k - \lambda - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda c_k (x - x_0)^k (y - y_0)^k = 0.$$

Отсюда $c_1 = \lambda$, $c_{k+1} = \frac{\lambda}{(k+1)^2} c_k$, откуда $c_k = \frac{\lambda^k}{k!^2}$. Итак, ряд

для функции Римана имеет вид

$$R_{\mathcal{M}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \lambda^k (x - x_0)^k (y - y_0)^k \quad (6)$$

и сходится тотально. Сопоставим ряд (6) с известными специальными функциями. Из равенства

$$R_{\mathcal{M}} = r((x - x_0)(y - y_0)) \text{ имеем}$$

$$\frac{\partial R_{\mathcal{M}}}{\partial x} = r'((x - x_0)(y - y_0))(y - y_0),$$

$$\frac{\partial^2 R_{\mathcal{M}}}{\partial x \partial y} = r''((x - x_0)(y - y_0))(x - x_0)(y - y_0) + r'((x - x_0)(y - y_0)).$$

Тогда уравнение для функции r после замены

$s = (x - x_0)(y - y_0)$ имеет вид

$$sr''(s) + r'(s) - \lambda r = 0. \quad (7)$$

Замена $s = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}} \xi^2$ преобразует уравнение (7) к известному

уравнению Бесселя индекса нуль

$$\xi^2 \frac{d^2 r}{d\xi^2} + \xi \frac{dr}{d\xi} + \xi^2 r = 0.$$

Из условия аналитичности r в окрестности $\xi = 0$ и равенства $r(0) = 1$ следует, что $r(\xi) = J_0(\xi)$, где J_0 — функции Бесселя индекса нуль. Отсюда

$$R_{\mathcal{M}}(x, y, x_0, y_0) = J_0 \left(2i\sqrt{\lambda(x - x_0)(y - y_0)} \right). \quad (8)$$

Формула (8) даёт правильную функцию Римана и при $\lambda = 0$.

Принимая во внимание известное разложение функции

Бесселя индекса нуль $J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$, имеем

$$R_{\mathcal{M}}(x, y, x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left(\frac{2i\sqrt{\lambda(x - x_0)(y - y_0)}}{2} \right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \lambda^k (x - x_0)^k (y - y_0)^k,$$

что совпадает с полученным выше разложением (6).

Ответ:

$$R_{\mathcal{L}}(x, y, x_0, y_0) = e^{-b(x-x_0)-a(y-y_0)} J_0 \left(2i\sqrt{\lambda(x - x_0)(y - y_0)} \right).$$