

МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ/ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается начально-краевая задача на интервале действительной прямой или периодическая задача Коши для линейного эволюционного уравнения второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами. Требуется получить представление решения задачи в виде ряда Фурье, а также интегральное представление. Для этого (пункты, отмеченные **красным**, делать не обязательно):

- 1) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям и/или заменой неизвестной функции уничтожить первую производную по x в операторе уравнения;
- 2) первый шаг метода Фурье: разделением переменных получить задачу Штурма-Лиувилля;
- 3) решить задачу Штурма-Лиувилля: найти собственные значения и собственные функции;
- 4) второй шаг метода Фурье: получить и решить ‘кошечки’ — задачи Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля;
- 5) получить общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи (периодической задачи Коши);
- 6) для указанных правых частей найти коэффициенты Фурье в явном виде (взять интегралы, их выражающие);
- 7) **исследовать зависимость решения от параметра задачи;**
- 8) **визуализировать решение (построить в математических средах поверхность или анимацию) для разных характерных и бифуркационных значений параметра задачи, выдержав необходимую глубину ряда Фурье.**

Ресурсы для решения задания #5

1. [Материалы](#) практической темы «Начально-краевые задачи».
2. [Примеры](#) решения инд. задания #5, **видео** с разбором этого примера.
3. Владимир В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х. Сборник задач по уравнениям математической физики. М: Физматлит, 2001.
4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд., стереотипное. М.: МЦНМО, 2004.
5. Комеч А.И. Практические решения уравнений математической физики. Механико-математический факультет МГУ, 1993. http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf

Номер варианта студента/студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 20**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **08.06.24, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = \cos t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 2 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = \sin \omega t, \\ u _{t=0} = 0, u_t _{t=0} = \psi(x), \\ f(x, t) = 0, \psi(x) = 0. \end{cases}$
Вариант 3. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = 0, u_x _{x=\pi} = e^{-at}, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 4. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = \sin \omega t, u _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0. \end{cases}$
Вариант 5. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + cu + f(x, t), -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(x + 2\pi, t) \equiv u(x, t), \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = 0, \\ f(x, t) = e^{-t} \operatorname{sign}(\sin x), \varphi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 6. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu_x - u + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = 1, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = \frac{x}{\pi}. \end{cases}$
Вариант 7. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bu_t, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = \sin t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 8. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_t + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = \sin \omega t, u_x _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = 0, \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$
Вариант 9. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = 0, u_x + \alpha u _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = \cos x, \psi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 10. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=\pi} = \sin t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$
Вариант 11. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - bu_x, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \end{cases}$	Вариант 12. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = e^{-at}, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = \sin x. \end{cases}$	Вариант 14. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bu_t, -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(x + 2\pi, t) \equiv u(x, t), \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = \text{sign}(\sin x). \end{cases}$
Вариант 15. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = \sin \omega t, u _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = \sin x. \end{cases}$	Вариант 16. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bu_t, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = \sin t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0. \end{cases}$
Вариант 17. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=\pi} = \sin \omega t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 18. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=\pi} = e^{-\alpha t}, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0. \end{cases}$
Вариант 19. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x, t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = \cos t, u_x _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = 0, \varphi(x) = 0. \end{cases}$	Вариант 20. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u _{x=0} = \sin \omega t, u _{x=\pi} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x), \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0. \end{cases}$