

ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

Тема 5 «Метод Фурье решения

начальных/начально-краевых задач»

Рассматривается начально-краевая задача на интервале действительной прямой либо периодическая задача Коши для линейного эволюционного уравнения второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами. Требуется получить представление решения задачи в виде ряда Фурье, а также интегральное представление. (пункты, отмеченные **красным**, делать не обязательно):

- 1) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям и/или заменой неизвестной функции уничтожить первую производную по x в операторе уравнения;
- 2) первый шаг метода Фурье: разделением переменных получить задачу Штурма—Лиувилля;
- 3) решить задачу Штурма-Лиувилля: найти собственные значения и собственные функции;
- 4) второй шаг метода Фурье: получить и решить ‘кошечки’ — задачи Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля;
- 5) получить общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи (периодической задачи Коши);
- 6) для указанных правых частей найти коэффициенты Фурье в явном виде (взять интегралы, их выражающие);
- 7) исследовать зависимость решения от параметра задачи;
- 8) визуализировать решение (построить в математических средах эволюционный диафильм или анимацию) для

разных типичные и бифуркационных значений параметра задачи, выдержав необходимую глубину ряда Фурье.

Пример #4.0. Рассмотрим ограниченный стержень длины l без внутренних источников тепла. Предположим, что его левый конец поддерживается при постоянной температуре u_0 , правый конец теплоизолирован, начальная температура $u(x,0) = \varphi(x)$. Эволюцию распределения температуры можно найти, решив задачу

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = A, u_x|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in L_2(0,l)$. Пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $A = 10$, $a = 1$, $l = \pi$.

Здравый смысл подсказывает, что в каждый момент времени $t > 0$ температура должна монотонно убывать от левого конца до правого, примерно как на рис. 1.1.

Однако, найти монотонное по x решение начально-краевой задачи в явном виде не представляется возможным...

- Сделаем редукцию к однородным краевым условиям.

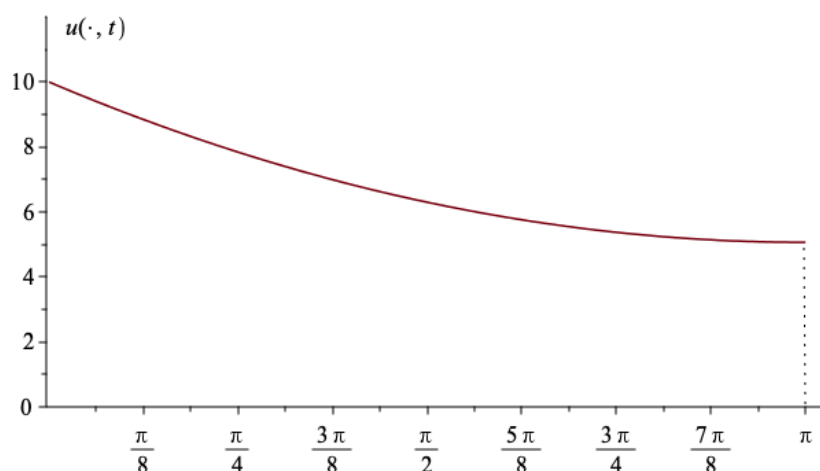


Рис. 1.1 (это не решение)

Метод Фурье или метод разделения переменных работает, если краевые условия однородные. Положим $u = v + w$, где v — новая неизвестная функция, а функция w удовлетворяет краевым условиям

$$w|_{x=0} = A, w_x|_{x=l} = 0.$$

Простейшая функция, удовлетворяющая вышеуказанным соотношениям, есть константа $w(x) \equiv A$. Получим начально-краевую задачу для функции v подстановкой $u = v + A$ в основную задачу:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - A, \\ v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Метод Фурье (метод разделения переменных) включает в себя два этапа:

- 1) разделением переменных, получение и решение задачи Штурма-Лиувилля;
- 2) разложение решения по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля и нахождение коэффициентов разложения.

• **Первый шаг метода Фурье: разделением переменных получим задачу Штурма-Лиувилля.**

Найдём некоторые частные решения однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющие краевым условиям задачи (1.1), представляющие собой *стоячие затухающие температурные волны*. Для этого сделаем подстановку $V = X(x)Y(t)$ в задачу

$$\begin{cases} V_t - a^2 V_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ V|_{x=0} = 0, V_x|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Подстановка в краевые условия даёт:

$$X(0)Y(t) = 0, X'(l)Y(t) = 0.$$

Мы полагаем, что функции $X = X(x)$ и $Y = Y(t)$ не равны нулю тождественно, поэтому последние два равенства дают

$$X(0) = 0, X'(l) = 0.$$

Подстановка $V = X(x)Y(t)$ в однородное уравнение теплопроводности приводит к соотношению

$$X(x)Y'(t) - a^2 X''(x)Y(t) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, разделив переменные:

$$\frac{Y'(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку x и t — независимые переменные, имеем

$$\frac{Y'(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = -\lambda.$$

Собираем задачу Штурма-Лиувилля (λ — спектральный параметр):

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Постановка задачи Штурма-Лиувилля: найти все такие λ , что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (1.2). По терминологии:

- λ — собственные значения задачи (1.2);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (1.2), соответствующие собственному значению λ .

• Решим задачу Штурма-Лиувилля (1.2), для чего рассмотрим три случая.

- а) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Имеем $X' = -\omega C_1 e^{-\omega x} + \omega C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -\omega C_1 e^{-\omega l} + \omega C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородных алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\omega e^{-\omega l} & \omega e^{\omega l} \end{vmatrix} = \omega(e^{\omega l} + e^{-\omega l}) = 0.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

- б) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Имеем $X' = C_1$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

- с) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Имеем $X' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -\omega C_1 \sin \omega l + \omega C_2 \cos \omega l = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Система (1.3) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\cos \omega l = 0$. Отсюда $\omega_n = \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1.2) есть $\lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$, а соответствующие собственные

функции имеют вид $X_n(x) = b_n \sin \omega_n x = b_n \sin \frac{\pi(n + 1/2)x}{l}$, $b_n \neq 0$.

Для каждого целого неотрицательного числа n получим стоячую решение $V_n(x, t) = X_n(x)Y_n(t)$. Здесь и далее везде считаем, что $b_n = 1$.

Общее решение уравнения $Y'_n + a^2 \lambda_n Y_n = 0$ есть $Y_n = B_n e^{-a^2 \lambda_n t}$. Отсюда указанные решения имеют вид $V_n(x, t) = B_n e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n + 1/2)x}{l}$. Первый этап метода Фурье завершён.

- **Второй шаг метода Фурье: получим и решим «кошечки» — задачи Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.**

Идея Ж.-Б. Ж. Фурье: решение начально-краевой задачи (1.1) можно представить в виде суперпозиции (суммы) бесконечного числа решений, полученных на предыдущем этапе:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(t). \quad (1.4)$$

Разрешим формальное дифференцирование ряда:

$$v_t = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y'_n(t), \quad v_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} X''_n(x) Y_n(t), \quad v_x = \sum_{n=0}^{\infty} X'_n(x) Y_n(t).$$

Подстановка ряда (1.4) в начально-краевую задачу (1.1) даёт

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y'_n(t) + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} X''_n(x) Y_n(t) = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(0) = \varphi(x) - A, \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_n(0) Y_n(t) = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} X'_n(l) Y_n(t) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия выполнены автоматически, потому что $X_n = X_n(x)$ — собственные функции задачи (1.2).

Разложим функцию в начальном условии в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (1.2):

$$\varphi(x) - A = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sin \omega_n x.$$

Найдём коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l (\varphi(x) - A) \sin \omega_n x dx \text{ или} \\ \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \omega_n x dx - \frac{2A}{\pi(n + 1/2)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Преобразуем уравнение теплопроводности и начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) (Y'_n(t) + a^2 \lambda_n Y_n(t)) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x).$$

Получим задачи Коши для неизвестных коэффициентов разложения $Y_n = Y_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} Y'_n + a^2 \lambda_n Y_n = 0, t > 0, \\ Y_n(0) = \varphi_n. \end{cases} \quad (1.6)$$

Единственное решение задачи (1.6) имеет вид $Y_n(t) = \varphi_n e^{-a^2 \lambda_n t}$. Итак, ряд (1.4) для решения задачи (1.1) имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}, \quad (1.7)$$

где выражение для коэффициентов φ_n даётся формулой (1.5).

Получив ряд (1.7) для решения начально-краевой задачи, его следует исследовать на сходимость. Однако, в настоящей теме курсовой работы сходимость не изучается.

- **Получим общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.**

Для этого подставим в формулу (1.7) выражение (1.5) для коэффициентов φ_n , заменив переменную интегрирования x на s :

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi(n+1/2)s}{l} ds - \frac{2A}{\pi(n+1/2)} \right) e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Разобьём ряд в разность двух рядов:

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi(n+1/2)s}{l} ds e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A}{\pi(n+1/2)} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Суммирование в элементарных функциях вычитаемого ряда представляется сомнительным, поэтому оставим его без изменений. Устроим рокировку:

$$v(x, t) = \int_0^l \varphi(s) ds \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)s}{l} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A}{\pi(n+1/2)} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Обозначим ядро в первом интеграле получившийся формулы через

$$K(s, x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)s}{l} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Тогда общая формула решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности имеет вид

$$u(x, t) = A + \int_0^l K(s, x, t) \varphi(s) ds - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2A}{\pi(n+1/2)} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} (n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

- Для указанных правых частей найдём коэффициенты Фурье в явном виде и визуализируем решение.

Положим $\varphi(x) \equiv 0$, $A = 10$, $a = 1$, $l = \pi$. Тогда решение основной начально-краевой задачи представляется формулой

$$u(x, t) = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-20}{\pi(n + 1/2)} e^{-(n+1/2)^2 t} \sin(n + 1/2)x$$

$$\text{или } u(x, t) = 10 - \frac{40}{\pi} e^{-\frac{1}{4}t} \sin \frac{x}{2} - \frac{40}{3\pi} e^{-\frac{9}{4}t} \sin \frac{3x}{2} - \dots$$

Рассмотрим N -ое приближение решения начально-краевой задачи $u_N(x, t) = 10 + Y_0(t)X_0(x) + \dots + Y_N(t)X_N(x)$. Построим приближённое решение в три момента времени:

i) $t_1 \ll T = \frac{l^2}{a^2} = \pi^2$, например, $t_1 = 1$;

ii) $t_2 \approx T$, например, $t_2 = 10$;

iii) $t_3 \gg T$, например, $t_3 = 100$.

Пусть $N = 5$. График приближённого решения при $t_1 = 1$:

График приближённого решения при $t_2 = 10$ изображён на рис. 1. 3. Приближённое решение при $t_3 = 100$ практически не отличается от константы (рис 1.4.).

Посмотрим на приближённое решение в динамике:

Пример #4.1.
Рассмотрим
начально-
краевую задачу
для
однородного
волнового
уравнения вида

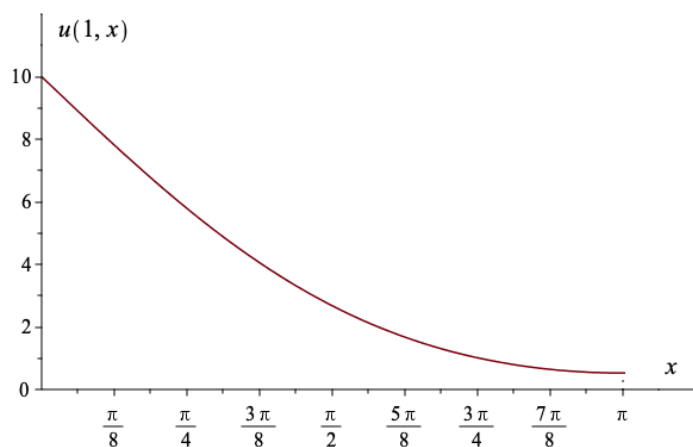
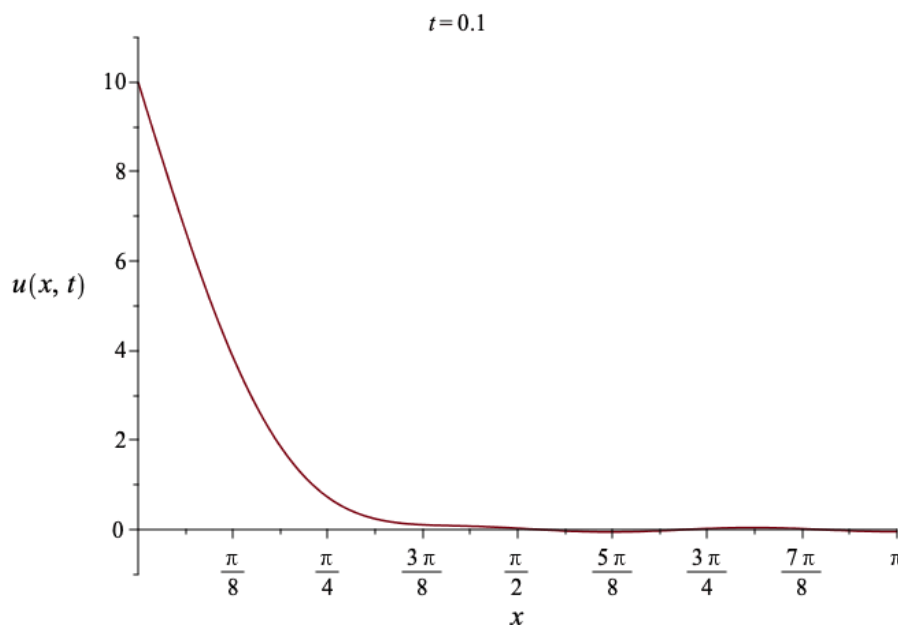


Рис. 1.2. Приближённое решение при $t_1=1$

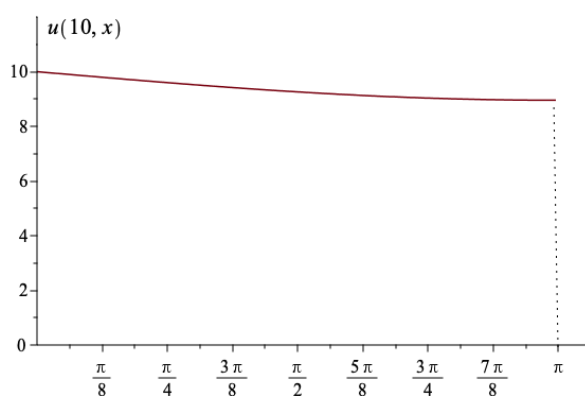


Рис. 1.3. Приближённое решение при $t_2=10$

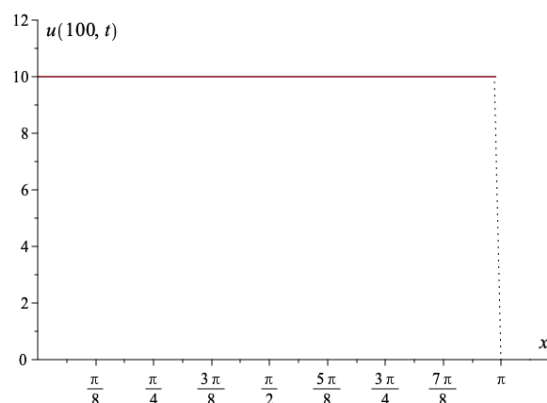


Рис. 1.4. Приближённое решение при $t_3=100$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = A \sin \Omega t. \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in H_0^1(0, \pi)$, то есть $\varphi \in H^1(0, \pi)$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, $\psi \in L_2(0, \pi)$. Дадим возможную физическую интерпретацию поставленной задачи. Левое сечение упругого стержня длины π , на который не действуют внешние силы, жёстко закреплено, а правое сечение движется по закону $A \sin \Omega t$. Тогда поставленная задача описывает продольные колебания стержня, где $u = u(x, t)$ — отклонение от положения равновесия сечения с координатой $x \in (0, \pi)$ в момент времени $t > 0$.

1) Сделаем редукцию к однородным краевым условиям.

Метод Фурье или метод разделения переменных работает, когда краевые условия однородные. Положим $u = v + w$, где v — новая неизвестная функция, а функция w удовлетворяет краевым условиям $w|_{x=0} = 0$, $w|_{x=\pi} = A \sin \Omega t$. Простейшая функция, удовлетворяющая вышеуказанным соотношениям, есть $w(x, t) = \frac{Ax}{\pi} \sin \Omega t$.

Получим начально-краевую задачу для функции v подстановкой $u = v + \frac{Ax}{\pi} \sin \Omega t$ в основную задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = \frac{A\Omega^2 x}{\pi} \sin \Omega t, 0 < x < \pi, t > 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x), v_t|_{t=0} = \psi(x) - \frac{A\Omega x}{\pi}, \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Обозначим $f(x, t) = \frac{A\Omega^2 x}{\pi} \sin \Omega t$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{A\Omega x}{\pi}$. **Метод Фурье (метод разделения переменных)** включает в себя два этапа или шага:

- 1) разделением переменных, получение и решение задачи Штурма—Лиувилля, нахождение стоячих волн;
- 2) разложение решения по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля и нахождение коэффициентов разложения.

2) Первый шаг метода Фурье: разделением переменных получим задачу Штурма-Лиувилля. Найдём *стоячие волны*, удовлетворяющие краевым условиям задачи (2.1). Для этого сделаем подстановку $V = X(x)Y(t)$ в задачу

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, 0 < x < \pi, t > 0, \\ V|_{x=0} = 0, V|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Подстановка в краевые условия даёт

$$X(0)Y(t) = 0, X(\pi)Y(t) = 0.$$

Мы полагаем, что функции $X = X(x)$ и $Y = Y(t)$ не равны нулю тождественно, поэтому последние два равенства дают

$$X(0) = 0, X(\pi) = 0.$$

Подстановка $V = X(x)Y(t)$ в однородное волновое уравнение даёт уравнение

$$X(x)Y''(t) - a^2X''(x)Y(t) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, разделив переменные:

$$\frac{Y''(t)}{a^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку x и t — независимые переменные, имеем

$$\frac{Y''(t)}{a^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = -\lambda.$$

Собираем задачу Штурма-Лиувилля, где λ — спектральный параметр:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, X(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Постановка задачи Штурма-Лиувилля: найти все такие λ , что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (2.2). По терминологии:

- λ — собственные значения задачи (2.2);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (2.2), соответствующие собственному значению λ .

3) Решим задачу Штурма—Лиувилля (2.2), для чего рассмотрим три случая.

- а) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2X = 0$ есть $X = C_1e^{-\omega x} + C_2e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1e^{-\omega\pi} + C_2e^{\omega\pi} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородных алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega\pi} & e^{\omega\pi} \end{vmatrix} = e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi} = 0. \text{ Отсюда } e^{2\omega\pi} = 1.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1x + C_2$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1\pi + C_2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

с) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega\pi = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Система (2.3) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sin \omega\pi = 0$. Отсюда $\omega_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (2.2) есть $\lambda_n = n^2$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_n(x) = b_n \sin \omega_n x = b_n \sin nx$, $b_n \neq 0$.

Для каждого натурального числа n получим стоячую волну $V_n(x, t) = X_n(x)Y_n(t)$. Здесь и далее везде считаем, что $b_n = 1$.

Общее решение уравнения $Y_n'' + a^2\lambda_n Y_n = 0$ есть $Y_n = A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t) = C_n \cos(a\omega_n t + \alpha_n)$. Отсюда стоячие волны имеют вид

$$V_n = (A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t)) \sin nx =$$

$= C_n \cos(ant + \alpha_n) \sin nx$. Первый этап метода Фурье завершён.

4) Второй шаг метода Фурье: получим и решим «кошечки» — задачи Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

Идея Ж.-Б. Ж. Фурье: решение начально-краевой задачи (2.1) можно представить в виде

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(t). \quad (2.4)$$

Разрешим формальное дифференцирование ряда:

$$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y'_n(t), \quad v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y''_n(t), \quad v_x = \sum_{n=1}^{\infty} X'_n(x) Y_n(t),$$

$$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} X''_n(x) Y_n(t).$$

Подстановка ряда (2.4) в начально-краевую задачу (2.1) даёт

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y''_n(t) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} X''_n(x) Y_n(t) = f(x, t), \quad 0 < x < \pi, t > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(0) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y'_n(0) = \tilde{\psi}(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(0) Y_n(t) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\pi) Y_n(t) = 0. \end{array} \right.$$

Краевые условия выполнены автоматически, потому что $X_n = X_n(x)$ — собственные функции задачи (2.2).

Разложим функции в начальных условиях в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.2):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \omega_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin nx, \\ \tilde{\psi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin \omega_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin nx.\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов разложения имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin(ns) ds, \quad \tilde{\psi}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{\psi}(s) \sin(ns) ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(s) \sin(ns) ds + \frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n}. \quad (2.5)\end{aligned}$$

Разложим правую часть уравнения в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.2):

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \omega_n x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx.$$

Выражение для коэффициентов (функций времени) разложения имеет вид

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, t) \sin(nx) dx = \frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \Omega t.$$

Преобразуем волновое уравнения и начальные условия:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (Y_n''(t) + a^2 \lambda_n Y_n(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) f_n(t), \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n X_n(x).\end{aligned}$$

Получим «кошечки» — задачки Коши для неизвестных коэффициентов разложения $Y_n = Y_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} Y_n'' + a^2 \lambda_n Y_n = \frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \Omega t, t > 0, \\ Y_n(0) = \varphi_n, Y_n'(0) = \tilde{\psi}_n. \end{cases} \quad (2.6)$$

- (i) Нерезонансный случай: $\Omega \neq a\omega_n$ для всех натуральных n .
Общее решение уравнения для $Y_n = Y_n(t)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$Y_n(t) = A_n \cos a\omega_n t + B_n \sin a\omega_n t + \frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n (a^2\omega_n^2 - \Omega^2)} \sin \Omega t.$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи (2.6):

$$Y_n(t) = \varphi_n \cos a\omega_n t + \left(\frac{\tilde{\psi}_n}{a\omega_n} - \frac{2A\Omega^3(-1)^{n+1}}{\pi n a\omega_n (a^2\omega_n^2 - \Omega^2)} \right) \sin a\omega_n t + \frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n (a^2\omega_n^2 - \Omega^2)} \sin \Omega t. \quad (2.7)$$

- (ii) Резонансный случай: $\Omega = a\omega_m$ для некоторого натурального m . Для $n \neq m$ решение задачи (2.6) даётся формулой, непосредственно следующей из формулы (2.7):

$$Y_n(t) = \varphi_n \cos a\omega_n t + \left(\frac{\tilde{\psi}_n}{a\omega_n} - \frac{2A\omega_m^3(-1)^{n+1}}{\pi n \omega_n (\omega_n^2 - \omega_m^2)} \right) \sin a\omega_n t + \frac{2A\omega_m^2(-1)^{n+1}}{\pi n (\omega_n^2 - \omega_m^2)} \sin a\omega_m t.$$

При $n = m$ общее решение уравнения имеет вид

$$Y_m(t) = A_m \cos a\omega_m t + B_m \sin a\omega_m t + \frac{Aa\omega_m(-1)^m}{\pi m} t \cos a\omega_m t.$$

С учётом начальных условий решение задачи (2.6) имеет вид

$$Y_m(t) = \varphi_m \cos a\omega_m t + \left(\frac{\tilde{\psi}_m}{a\omega_m} - \frac{Aa\omega_m(-1)^m}{\pi m} \right) \sin a\omega_m t +$$

$$+ \frac{Aa\omega_m(-1)^m}{\pi m} t \cos a\omega_m t.$$
 В нерезонансном случае ряд (2.4), представляющий решение начально-краевой задачи (2.1), имеет вид

$$\begin{aligned}
 v(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(ant) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{an} \sin(ant) \sin(nx) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n (a^2 n^2 - \Omega^2)} \sin \Omega t - \frac{2A\Omega^3(-1)^{n+1}}{\pi n^3 a (a^2 n^2 - \Omega^2)} \sin(ant) \right) \sin(nx).
 \end{aligned}$$

В резонансном случае, когда $\Omega = a\omega_m$, ряд (2.4), представляющий решение начально-краевой задачи, имеет

$$\begin{aligned}
 \text{вид } v(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(ant) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{an} \sin(ant) \sin(nx) + \\
 & + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} \left(\frac{2Am^2(-1)^{n+1}}{\pi n (n^2 - m^2)} \sin(amt) - \frac{2Am^3(-1)^{n+1}}{\pi n^2 (n^2 - m^2)} \sin(ant) \right) \sin(nx) + \\
 & + \frac{Aa(-1)^m}{\pi} (t \cos(amt) - \sin(amt)) \sin(mx).
 \end{aligned}$$

Введём следующее обозначение:

$$p_{\Omega}(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n (a^2 n^2 - \Omega^2)} \sin \Omega t - \frac{2A\Omega^3(-1)^{n+1}}{\pi n^3 a (a^2 n^2 - \Omega^2)} \sin(ant) \right) \sin(nx), \\ \text{если } \frac{\Omega}{a} \notin \mathbb{N}; \\ \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} \left(\frac{2Am^2(-1)^{n+1}}{\pi n (n^2 - m^2)} \sin(amt) - \frac{2Am^3(-1)^{n+1}}{\pi n^2 (n^2 - m^2)} \sin(ant) \right) \sin(nx) + \\ + \frac{Aa(-1)^m}{\pi} (t \cos(amt) - \sin(amt)) \sin(mx), \text{ если } \frac{\Omega}{a} = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(2.8)

Как в нерезонансном случае, так и в резонансном случае ряд (2.4), представляющий решение начально-краевой задачи, имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(ant) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{an} \sin(ant) \sin(nx) + p_{\Omega}(x, t). \quad (2.9)$$

5) Получим общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Для этого подставим в формулу (2.9) выражения (2.5) для коэффициентов φ_n , $\tilde{\psi}_n$, заменив переменную интегрирования x на s :

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ant) \sin(nx) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin(ns) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ant)}{an} \sin(nx) \cdot \\ & \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(s) \sin(ns) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n} \frac{\sin(ant)}{an} \sin(nx) + p_{\Omega}(x, t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Суммирование в элементарных функциях явного ряда из (2.10), а также рядов из (2.8) представляется очень трудным, поэтому оставим эти ряды без изменений. Сделаем рокировку:

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \int_0^{\pi} \varphi(s) ds \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ant) \sin(nx) \sin(ns) + \int_0^{\pi} \psi(s) ds \cdot \\ & \cdot \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ant)}{an} \sin(nx) \sin(ns) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n} \frac{\sin(ant)}{an} \sin(nx) + p_{\Omega}(x, t). \end{aligned}$$

Обозначим $K(s, x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ant)}{an} \sin(nx) \sin(ns)$. Тогда

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ant) \sin(nx) \sin(ns), \text{ и формула для решения}$$

начально-краевой задачи для волнового уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{Ax}{\pi} \sin \Omega t + \int_0^{\pi} \frac{\partial K}{\partial t} \varphi(s) ds + \int_0^{\pi} K(s, x, t) \psi(s) ds + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n} \frac{\sin(ant)}{an} \sin(nx) + p_{\Omega}(x, t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

6—7) Найдём решение для $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, исследуем его зависимость от параметра $\Omega > 0$. Кроме того, положим $a = 1, A = 10^{-2}$.

(i) Нерезонансный случай: $\Omega \notin \mathbb{N}$. Тогда решение представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 10^{-2} \frac{x}{\pi} \sin \Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2} \frac{2\Omega(-1)^n}{\pi n^2} \sin(nt) \sin(nx) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2} \frac{2\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n (n^2 - \Omega^2)} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{n^2} \sin(nt) \right) \sin(nx). \end{aligned}$$

Фиксируем точку $x \in (0, \pi)$. Возможны два случая.

а) $\Omega \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$, то есть $\Omega = \frac{\mu}{\nu}$, где μ, ν — взаимно простые натуральные числа, причём $\nu \geq 2$. Тогда решение периодически по t с минимальным периодом $T = 2\pi\nu$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ $\sin n(t + T) = \sin(nt + 2\pi\nu n) = \sin(nt)$, поэтому

$$\begin{aligned}
u(x, t+T) &= 10^{-2} \frac{x}{\pi} \sin(\Omega t + 2\pi\nu\Omega) + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2} \frac{2\Omega(-1)^n}{\pi n^2} \sin(nt)\sin(nx) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2} \frac{2\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n(n^2 - \Omega^2)} \left(\sin(\Omega t + 2\pi\nu\Omega) - \frac{\Omega}{n^2} \sin(nt) \right) \sin(nx) = \\
&= u(x, t).
\end{aligned}$$

b) $\Omega \notin \mathbb{Q}$. Тогда решение периодическим по t не будет, но будет условно периодическим.

В обоих случаях решение есть ограниченная функция для всех $x \in [0, \pi]$ и $t \geq 0$, что устанавливается элементарной оценкой составляющих решение рядов.

(ii) Резонансный случай: $\Omega = m \in \mathbb{N}$. Тогда решение представляется в виде ряда

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= 10^{-2} \frac{x}{\pi} \sin mt + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2} \frac{2m(-1)^n}{\pi n^2} \sin(nt)\sin(nx) + \\
&+ \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} 10^{-2} \frac{2m^2(-1)^{n+1}}{\pi n(n^2 - m^2)} \left(\sin(mt) - \frac{m}{n^2} \sin(nt) \right) \sin(nx) + \\
&+ \frac{(-1)^m}{\pi} 10^{-2} (t \cos(mt) - \sin(mt)) \sin(mx).
\end{aligned}$$

Очевидно, что решение в нерезонансном случае не периодическая функция и не может быть ограниченной на промежутке $t \in [0, \infty)$ из-за секулярного члена

$$\frac{(-1)^m}{\pi} 10^{-2} t \cos(mt) \sin(mx).$$

Отметим, что оценка этого члена

не зависит от числа m и линейно растёт со временем:

$$\left| \frac{(-1)^m}{\pi} 10^{-2} t \cos(mt) \sin(mx) \right| \leq \frac{t}{100\pi}.$$

Приложение к примеру #4.1 (визуализация приближённого решения в резонансном и нерезонансном случаях)

(см. оригинальный MAPLE-документ на странице курса в LMS; free-trial версия математической среды доступна по [ссылке](#) и работает 15 дней)

- Задаём функцию w , участвующую в редукции:

$$w := \frac{A \cdot x}{l} \cdot \sin(\Omega \cdot t);$$

$$w := \frac{A x \sin(\Omega t)}{l}$$

- Задаём правые части — функции f , ϕ и ψ :

$$f := 0; \quad \phi := 0; \quad \psi := 0;$$

$$f := 0$$

$$\phi := 0$$

$$\psi := 0$$

- Находим правые части редуцированной задачи (функции fr , $phir$, $psir$):

$$fr := f - \text{diff}(w, t\$2) + a^2 \cdot \text{diff}(w, x\$2);$$

$$fr := \frac{A x \Omega^2 \sin(\Omega t)}{l}$$

$$phir := \text{simplify}(\phi - \text{subs}(t=0, w));$$

$$phir := 0$$

$$psir := \text{simplify}(\psi - \text{subs}(t=0, \text{diff}(w, t)));$$

$$psir := -\frac{A x \Omega}{l}$$

- Вводим собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\text{omegan} := \frac{\text{Pi} \cdot n}{l}; \quad \text{lambdan} := \text{omegan}^2;$$

$$\text{omegan} := \frac{\pi n}{l}$$

$$\text{lambdan} := \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$$

$$X_n := \sin(\omega_n \cdot x);$$

$$X_n := \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

- Находим коэффициенты Фурье функций f_r , φ_r и ψ_r :

$$f_{rn} := \frac{2}{l} \cdot \int (f_r \cdot X_n, x=0..l);$$

$$f_{rn} := - \frac{2 (\pi n \cos(\pi n) - \sin(\pi n)) A \Omega^2 \sin(\Omega t)}{\pi^2 n^2}$$

$$\varphi_{rn} := \frac{2}{l} \cdot \int (\varphi_r \cdot X_n, x=0..l);$$

$$\varphi_{rn} := 0$$

$$\psi_{rn} := \frac{2}{l} \cdot \int (\psi_r \cdot X_n, x=0..l);$$

$$\psi_{rn} := \frac{2 (\pi n \cos(\pi n) - \sin(\pi n)) A \Omega}{\pi^2 n^2}$$

- Составим задачи Коши для определения коэффициентов разложения решения редуцированной задачи:

$$eqn := \{diff(Y_n(t), t^2) + a^2 \cdot \lambda_{dan} \cdot Y_n(t) = f_{rn}, Y_n(0) = \varphi_{rn}, D(Y_n)(0) = \psi_{rn}\};$$

$$eqn := \left\{ \frac{d^2}{dt^2} Y_n(t) + \frac{a^2 \pi^2 n^2 Y_n(t)}{l^2} = - \frac{2 (\pi n \cos(\pi n) - \sin(\pi n)) A \Omega^2 \sin(\Omega t)}{\pi^2 n^2}, Y_n(0) = 0, D(Y_n)(0) = \frac{2 (\pi n \cos(\pi n) - \sin(\pi n)) A \Omega}{\pi^2 n^2} \right\}$$

- Определимся с глубиной фурье-суммы, представляющей приближённое решение:

$$N := 50;$$

$$N := 50$$

Опять же положим $a = 1, A = 10^{-2}$.

Прежде всего визуализируем резонансный кейс.

• Присвоим всем параметры числовые значения:

$a := 1; l := \text{Pi}; A := 0.01; \text{Omega} := 4;$

$a := 1$

$l := \pi$

$A := 0.01$

$\Omega := 4$

• Построим приближение Фурье решения начально-краевой задачи:

$uN := w + \text{sum}(\text{eval}(Yn(t), \text{dsolve}(\text{eqn}, Yn(t))) \cdot Xn, n = 1 .. N) :$

• Находим характерное время волнового процесса:

$Tch := \frac{2 \cdot \text{Pi}}{\text{Omega}};$

$Tch := \frac{\pi}{2}$

• Задаём три избранных момента времени:

$t1 := Tch; t2 := 2 \cdot Tch; t3 := 3 \cdot Tch;$

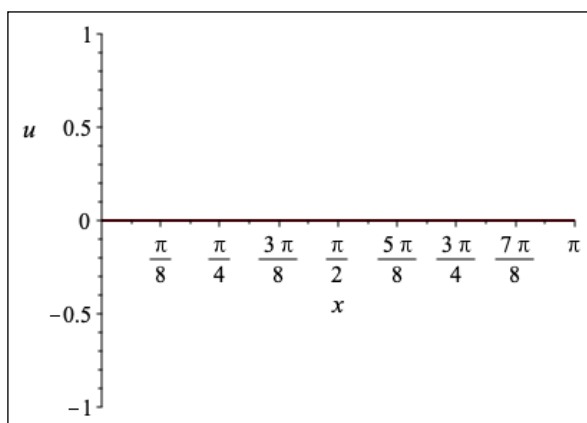
$t1 := \frac{\pi}{2}$

$t2 := \pi$

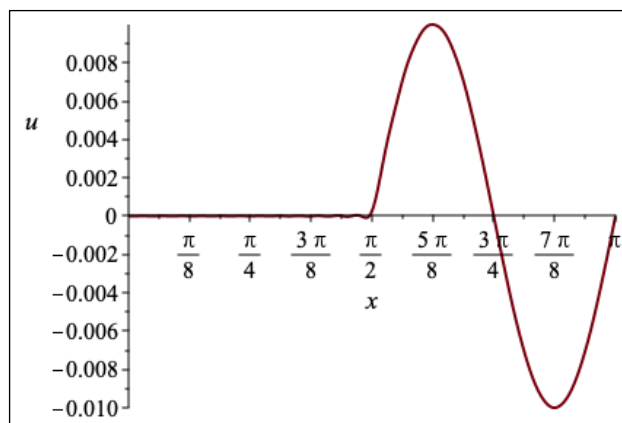
$t3 := \frac{3\pi}{2}$

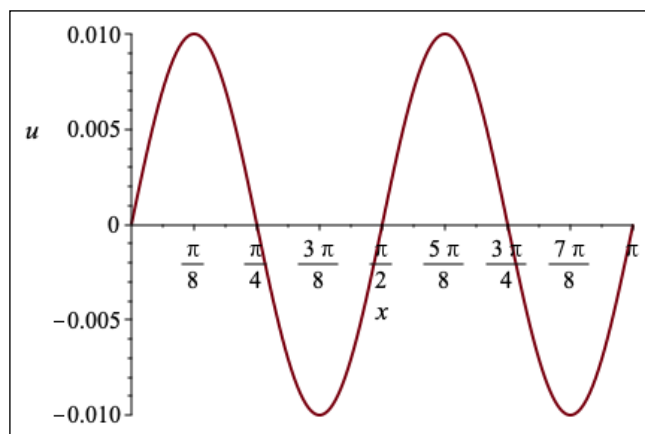
Построим графики приближённого решения в избранные моменты времени.

$t = 0$

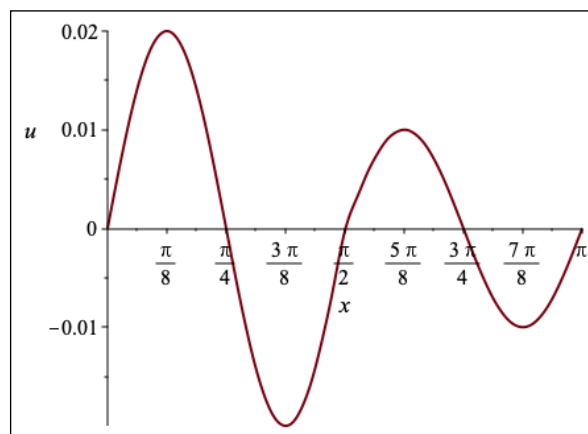


$t_1 = \pi/2$





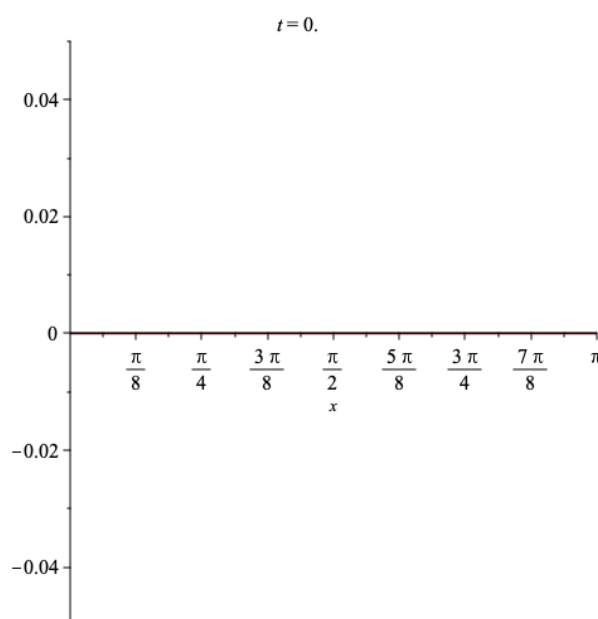
$$t_1 = \pi$$



$$t_2 = 3\pi/2$$

Мы видим некоторый рост амплитуды со временем, что должно быть при резонансе, но для более яркой демонстрации влияния секулярных членов рассмотрим анимацию приближённого решения при $t \in [0, 5\pi]$.

Теперь визуализируем нерезонансный периодический кейс (i) а).



- Присвоим всем параметры числовые значения:

$$a := 1; l := \pi; A := 0.01; \Omega := \frac{7}{2};$$

$$a := 1$$

$$l := \pi$$

$$A := 0.01$$

$$\Omega := \frac{7}{2}$$

- Построим приближение Фурье решения начально-краевой задачи:

$$uN := w + \text{sum}(\text{eval}(Yn(t), \text{dsolve}(eqn, Yn(t))) \cdot Xn, n = 1 \dots N) :$$

- Находим характерное время волнового процесса:

$$Tch := \frac{2 \cdot \Pi}{\Omega};$$

$$Tch := \frac{4 \pi}{7}$$

- Задаём три избранных момента времени:

$$t1 := Tch; t2 := 2 \cdot Tch; t3 := 3 \cdot Tch;$$

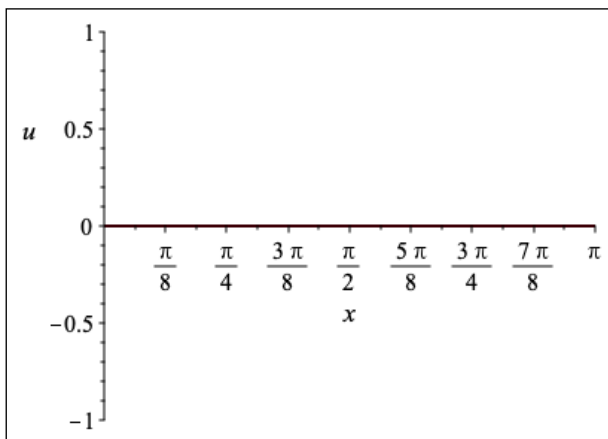
$$t1 := \frac{4 \pi}{7}$$

$$t2 := \frac{8 \pi}{7}$$

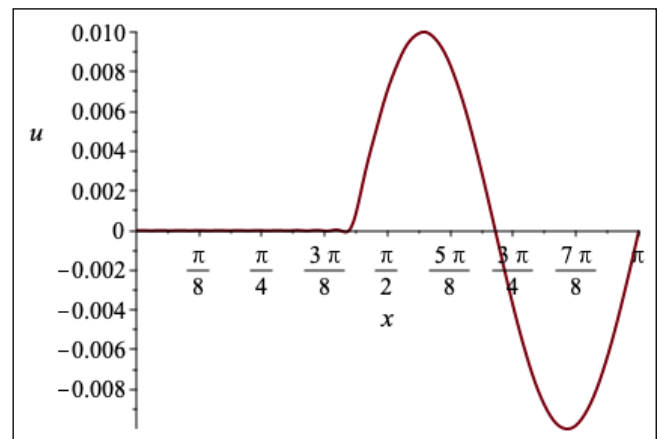
$$t3 := \frac{12 \pi}{7}$$

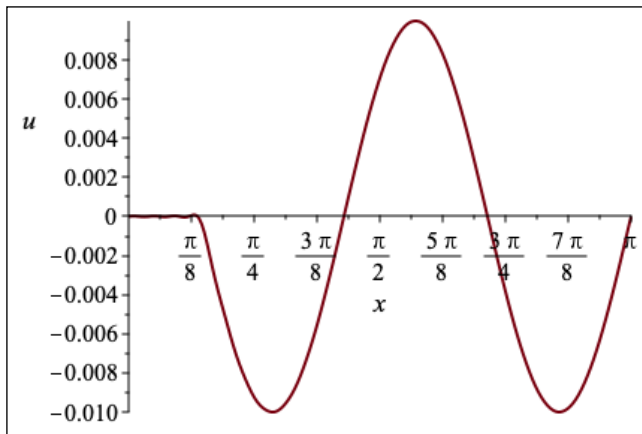
Построим графики приближённого решения в избранные моменты времени.

$$t = 0$$

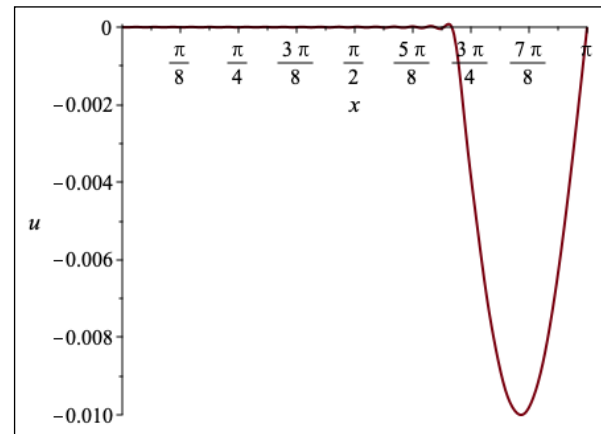


$$t_1 = 4\pi/7$$





$$t_2 = 8\pi/7$$



$$t_3 = 12\pi/7$$

Анимация приближённого
решения при $t \in \left[0, \frac{40\pi}{7}\right]$.
Периодический характер
решения очевиден.

