

Уравнения в частных производных

Эллиптические операторы

второго порядка

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

<https://baikov.org/pde>

Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов
4. Методы решения краевых задач

Эллиптические операторы второго порядка

- Эллиптический оператор в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

где $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — известные коэффициенты, матрица старших

коэффициентов $A(x) = \left(a_{ij}(x) \right)_{i,j=1}^n$ положительно (или

отрицательно) определена: для любой $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$\xi \neq 0$, $\xi^T A(x) \xi > 0$ (или $\xi^T A(x) \xi < 0$).

- Эллиптический оператор $\mathcal{L}$ *равномерно эллиптичен* в области Ω , если существует $\gamma > 0$, что для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

Дивергентные эллиптические операторы

$$\xi^T A(x) \xi \geq \gamma |\xi|^2 \quad (\xi^T A(x) \xi \leq -\gamma |\xi|^2).$$

- Эллиптический оператор $\mathcal{L}$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *дивергентным*, если его можно представить в виде

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u,$$

где $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T$ — градиент, $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$ —

дивергенция векторного поля $\vec{a} = a_1(x)\vec{e}_1 + \dots + a_n(x)\vec{e}_n$. Отдельного

рассмотрения заслуживают дивергентные операторы вида

$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (p(x) \nabla u) + c(x)u$, где $p, c \in C(\overline{\Omega})$ — известные

функции, $p(x) \geq p_0 > 0$ (нужно для равномерной эллиптичности).

В предчувствии вариационного метода: внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.1)$$

Для гипотетического классического решения $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (обратите внимание на сужение обычного пространства класс. решений) рассмотрим *функционал энергии*

$$E(u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx - 2 \int_{\Omega} f(x)u dx. \quad (2.2)$$

Как он связан с задачей (2.1)?

Экстремаль функционала энергии

Предположим, что на множестве функций $\left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$ мы нашли глобальную экстремаль $u^\star$ функционала энергии, доставляющую ему глобальный минимум: для всех $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, $E(u^\star) \leq E(u)$. Покажем, что экстремаль $u^\star$ удовлетворяет задаче Дирихле (2.1).

Для этого рассмотрим функцию $\delta u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\delta u|_{\partial\Omega} = 0$ (вариацию экстремали), число $t \in \mathbb{R}$, и найдём приращение функционала энергии. Имеем

Приращение функционала энергии

$$\begin{aligned} 0 \leq E(u^* + t\delta u) - E(u^*) &= \int_{\Omega} (\nabla u^* + t\nabla \delta u) \cdot (\nabla u^* + t\nabla \delta u) dx - \\ &- 2 \int_{\Omega} f(x)(u^* + t\delta u) dx - \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla u^* dx + 2 \int_{\Omega} f(x)u^* dx = \\ &= t^2 \int_{\Omega} |\nabla \delta u|^2 dx + 2t \int_{\Omega} (\nabla u^* \cdot \nabla \delta u - f(x)\delta u) dx - \end{aligned}$$

квадратичная функция от $t \Rightarrow$ для всех δu

$$\int_{\Omega} (\nabla u^* \cdot \nabla \delta u - f(x)\delta u) dx = 0. \quad (2.3)$$

(2.3) — необходимое условие экстремали.

Лемма Дюбуа-Реймона

Вспомним первую формулу Грина

$$\int_{\Omega} v \Delta u^{\star} dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u^{\star}}{\partial \vec{\nu}} ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u^{\star} dx$$

($v = \delta u$) и преобразуем интегральное равенство (2.3), учитывая

$$\delta u|_{\partial\Omega} = 0: \int_{\Omega} (-\Delta u^{\star} - f(x)) \delta u dx = 0.$$

Лемма 2.1 (непрерывная версия леммы Дюбуа-Реймона). Пусть $u \in C(\Omega)$ и для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^{\infty}(\Omega)$ (финитной бесконечно дифференцируемой функции) $\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0$. Тогда $u(x) = 0$ в Ω .

Уравнение Эйлера—Лагранжа

Действительно, если $u(x^0) \neq 0$, например, $u(x^0) > 0$, то существует окрестность $U(x^0) \Subset \Omega$ и для всех $x \in U(x^0)$ $u(x) > 0$. Но тогда можно взять функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\emptyset \neq \text{supp } \varphi \Subset U(x^0)$ и $\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx > 0$, что противоречит

условиям леммы.

Итак, $-\Delta u^* - f(x) = 0 \Leftrightarrow -\Delta u^* = f(x), x \in \Omega$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала энергии (2.2). Следовательно, его экстремаль — решение задачи Дирихле (2.1) из пространства $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Проблемы вариационного метода

Основные проблемы вариационного метода.

- 1) Существует ли экстремаль функционала энергии?
- 2) Как построить экстремаль функционала энергии?
- 3) Как устроены функционалы энергии других краевых задач?

К сожалению (или к счастью), для положительного ответа на первый вопрос функциональное пространство $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ и другие классические функциональные пространства с заданными на них структурами совершенно не подходят, нужны полные пространства — пространства Соболева, уже изученные в первой теме весеннего семестра.

Евклидовы пространства

Определение 2.1. Пусть H — линейное пространство с произвольной природой элементов. Форма $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением* в H , если она удовлетворяет аксиомам:

- (i) для любых $u, v, w \in H$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$
 $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$, $(\lambda u, w) = \lambda(u, w)$ (линейность по первому элементу);
- (ii) для любых $u, v \in H$ $(u, v) = (v, u)$ (симметричность);
- (iii) для любого $u \in H$, $u \neq 0$, $(u, u) > 0$ (позитивность).

Пара $(H, (\cdot, \cdot))$ называется *евклидовым пространством*.

Примеры евклидовых пространств

Рассмотрим примеры евклидовых пространств.

1. Координатное пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярными произведением $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.
2. Пространство $CL_2(\overline{\Omega})$, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, состоящее из всех непрерывных функций в $\overline{\Omega}$, со скалярным произведением

$$(u, v)_{CL_2(\overline{\Omega})} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

3. Пространство $C^kL_2(\overline{\Omega})$, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, состоит из всех k раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, скалярно произведение

$$(u, v)_{C^kL_2(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}u D^{\alpha}v dx.$$

Примеры евклидовых пространств.

Неравенство Коши—Буняковского

4. Пространство l_2 , состоящее из всех квадратично суммируемых последовательностей: $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

Скалярное произведение в l_2 : $(x, y)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

Утверждение 2.1. Пусть H — евклидово пространство, тогда любые $u, v \in H$ удовлетворяют *неравенству Коши—Буняковского*

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v), \quad (2.4)$$

причём знак равенства имеет место только в том случае, когда элементы u, v линейно зависимы.

Евклидова норма

Доказательство. Если $v = 0$, то неравенство (2.4) очевидно.

Фиксируем $u, v \in H, v \neq 0$, и рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = (u + tv, u + tv) = (v, v)t^2 + 2(u, v)t + (u, u) \geq 0$. Поскольку $f(0) = (u, u) \geq 0$, дискриминант не должен быть больше нуля:

$4|(u, v)|^2 - 4(u, u)(v, v) \leq 0 \Rightarrow$ неравенство (2.4). Дискриминант равен нулю ((2.4) обращается в равенство) $\Leftrightarrow \exists t_* \ u + t_*v = 0$.

Утверждение 2.1 доказано.

Пусть H — евклидово пространство, тогда функционал

$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ есть норма в H , она называется *евклидовой нормой*.

Однородность и невырожденность евклидовой нормы очевидны.

Тождество параллелограмма

Получим неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) \leq \|u\|^2 + \\ &+ 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

Мы применили неравенство Коши—Буняковского, представленное в виде $|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|$.

Таким образом, евклидовы пространства имеют естественную нормировку. Верно ли обратное, т.е. всякую ли норму можно таким образом породить скалярным произведением?

Утверждение 2.2. Пусть N — нормированное пространство. Норма $\|\cdot\|$ тогда и только тогда порождена скалярным произведением,

Тождество параллелограмма

когда для любых $u, v \in N$ справедливо *тождество параллелограмма*

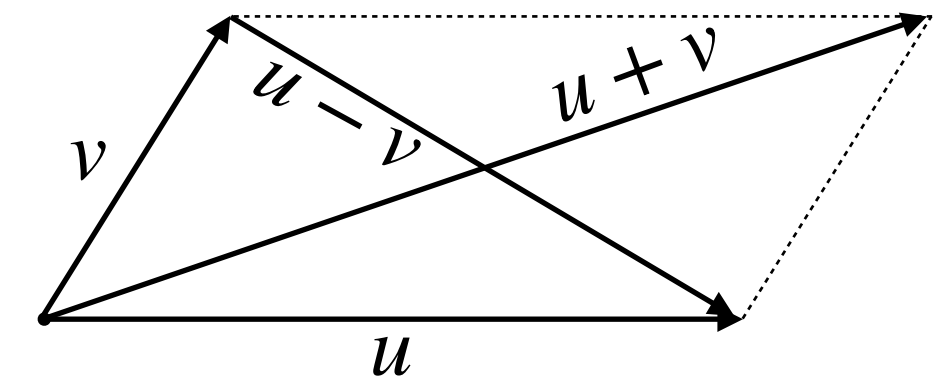
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (2.5)$$

Для евклидовой нормы тождество (2.5)

элементарно проверяется. Предположим,

что норма удовлетворяет тождеству (2.5).

Положим $(u, v) = \frac{\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}.$



Позитивность и симметричность очевидны, линейность нужно проверять (упражнение).

Пример: $C(K)$, где $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — компакт, — нормированное, но евклидово пространство.

Линейные функционалы

Отвлечёмся пока от евклидовых пространств.

Определение 2.2. Пусть N — нормированное пространство.

Функционал $l : N \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейным*, если для любых $u, v \in N$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ 1) $l(u + v) = l(u) + l(v)$ (аддитивность); 2) $l(\lambda u) = \lambda l(u)$ (однородность).

Обозначение: $\langle l, u \rangle := l(u)$.

Утверждение 2.3. Следующие свойства линейного функционала эквивалентны:

- (i) *непрерывность по Гейне*: для любой последовательности $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N$, сходящейся в N к элементу $u^{\star} \in N$, $\langle l, u_j - u^{\star} \rangle \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$;

Норма ограниченного линейного функционала

(ii) *ограниченность*: существует константа $C \geq 0$, что для всех $u \in N$ $|\langle l, u \rangle| \leq C\|u\|$.

Доказательство. Сначала заметим, что непрерывность по Гейне достаточно проверять для последовательностей, сходящихся к нулевому элементу. Тогда (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно. Для доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) рассмотрим величину $\|l\|^* = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle l, u \rangle|$ (супремум по всем элементам $u \in N$ с нормой ≤ 1). Если $\|l\|^* = \infty$, то существует последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N$, $\|u_j\| \leq 1$, $|\langle l, u_j \rangle| > j^2$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Сопряжённое пространство

Положим $v_j = \frac{u_j}{j}$, тогда $\|v_j\| = \frac{1}{j}\|u_j\| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, т.е. $v_j \rightarrow 0$ в N . Но $|\langle l, v_j \rangle| > j$, поэтому $\langle l, v_j \rangle$ не стремится к нулю, что противоречит непрерывности функционала. Можно взять $C = \|l\|^*$. Утверждение 2.3 доказано.

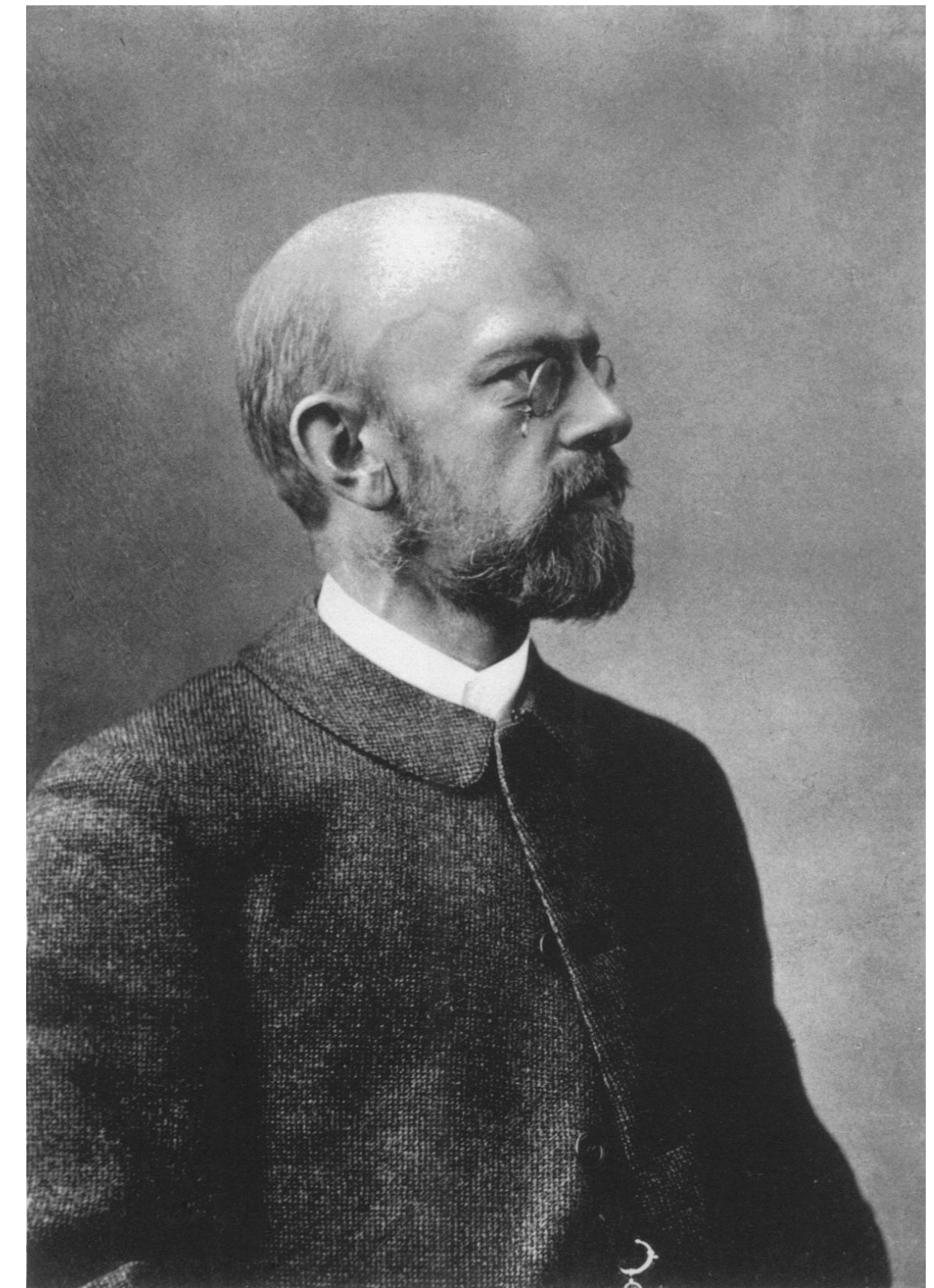
$\|l\|^* = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle l, u \rangle|$ — норма ограниченного линейного функционала.

Определение 2.3. Пусть N — нормированное пространство. Тогда множество всех ограниченных линейных функционалов над N вместе с $\|\cdot\|^*$ образует нормированное пространство N^* — *сопряжённое* к N .

Гильбертовы пространства

Определение 2.4. Евклидово пространство H называется *гильбертовым*, если оно полное относительно нормы, порождённой скалярным произведением.

- $\mathbb{R}^n$ — конечномерное гильбертово пространство;
- l_2 — бесконечномерное гильбертово пространство;
- Норма евклидовых пространств $CL_2(\overline{\Omega})$, $C^k L_2(\overline{\Omega})$ не полна...



David Hilbert (1862 – 1943)

Абстрактный функционал энергии

Пусть H — гильбертово пространство, $(\cdot, \cdot)'$ — билинейная симметрическая форма в H , такая, что существуют константы $\alpha > 0, \beta > 0$, и для любого $u \in H$ $(u, u)' \leq \alpha^2(u, u)$ и $(u, u) \leq \beta^2(u, u)'$, где $(\cdot, \cdot)$ — естественное скалярное произведение в H . Рассмотрим также ограниченный линейный функционал $l \in H^*$, обозначим $\langle l, u \rangle = l(u), u \in H$. Будем работать с функционалом энергии $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle$.

Поставим вариационную проблему

$$E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle \rightarrow \min, u \in H. \quad (2.6)$$

Теорема об экстремали

Теорема 2.1. Существует единственный элемент $u^* \in H$, называемый *экстремалью*, минимизирующий функционал энергии E , т.е. $\exists!$ решение вариационной проблемы (2.6).

Доказательство. Шаг 1. Обозначим $\sqrt{(u, u)'} = \|u\|'$, $(u, u) = \|u\|^2$. Покажем, что функционал энергии ограничен снизу:

$$\begin{aligned} E(u) &= \|u\|'^2 - 2\langle l, u \rangle \geq \|u\|'^2 - 2|\langle l, u \rangle| \geq \|u\|'^2 - 2\|l\|^* \|u\| \geq \\ &\geq \|u\|'^2 - 2\beta \|l\|^* \|u\|' = (\|u\|' - \beta \|l\|^*)^2 - \beta^2 \|l\|^{*2} \geq -\beta^2 \|l\|^{*2}. \end{aligned}$$

Теорема об экстремали: доказательство

Обозначим $\mu = \inf_{u \in H} E(u)$. По определению точной нижней грани

существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, для которой $E(u_k) \rightarrow \mu$ при $k \rightarrow \infty$. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовём *минимизирующей*.

Шаг 2. Покажем, что всякая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна. По определению предела имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq N$ $\mu \leq E(u_k) \leq \mu + \varepsilon$. Так как

$$\left\| \frac{u_k + u_j}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u_k - u_j}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|u_k\|^2 + \|u_j\|^2 \right),$$

Теорема об экстремали: доказательство

получим
$$\left\| \frac{u_k - u_j}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|u_k\|^2 + \|u_j\|^2 \right) - \left\| \frac{u_k + u_j}{2} \right\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \left(E(u_k) + E(u_j) \right) - E \left(\frac{u_k + u_j}{2} \right). \text{ Но } E \left(\frac{u_k + u_j}{2} \right) \geq \mu, \text{ поэтому при}$$

любых $k, j \geq N$

$$0 \leq \left\| \frac{u_k - u_j}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(\mu + \varepsilon + \mu + \varepsilon) - \mu = \varepsilon \Rightarrow$$

$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность.

Шаг 3. В силу полноты H существует $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u^* \in H$ всякой минимизирующей последовательности.

Теорема об экстремали: доказательство

Покажем, что $E(u^\star) = \mu$, т.е. $u^\star \in H$ — решение вариационной проблемы (2.6). Действительно, $\|u_k\|^2 \rightarrow \|u^\star\|^2$ при $k \rightarrow \infty$ (упражнение), $\langle l, u_k \rangle \rightarrow \langle l, u^\star \rangle$, $k \rightarrow \infty$, поэтому $E(u_k) \rightarrow E(u^\star) = \mu$ при $k \rightarrow \infty$.

Шаг 4. Докажем единственность экстремали. Пусть $\tilde{u} \in H$ — другая экстремаль. Тогда последовательность $u^\star, \tilde{u}, u^\star, \tilde{u}, \dots$ минимизирует функционал энергии $\Rightarrow$ она фундаментальная $\Rightarrow u^\star = \tilde{u}$. Теорема 2.1 доказана.

Необходимое условие экстремали

Утверждение 2.4. Пусть $u^* \in H$ — экстремаль функционала энергии $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle$. Тогда для любого $\delta u \in H$

$$(u^*, \delta u)' - \langle l, \delta u \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную вариацию $\delta u \in H$, произвольное число $t \in \mathbb{R}$, найдём приращение функционала энергии: $0 \leq E(u^* + t\delta u) - E(u^*) = (u^* + t\delta u, u^* + t\delta u)' - 2\langle l, u^* + t\delta u \rangle - (u^*, u^*)' + 2\langle l, u^* \rangle = (\delta u, \delta u)'t^2 + 2t \left((u^*, \delta u)' - \langle l, \delta u \rangle \right) \Rightarrow (u^*, \delta u)' - \langle l, \delta u \rangle = 0$ для любой $\delta u \in H$, что и требовалось доказать.

Сепарабельные гильбертовы пространства

Пусть H — гильбертово пространство.

- 1) Система $\{e_j\}_{j \in J} \subset H$ называется *линейно независимой*, если линейно независима любая конечная подсистема в ней.
- 2) *Линейной оболочкой* системы $\{e_j\}_{j \in J} \subset H$ называется множество всех конечных линейных комбинаций её элементов, обозначение $\text{Lin}\{e_j\}_{j \in J}$.
- 3) Система $\{e_j\}_{j \in J} \subset H$ называется *тотальной* в H , если её линейная оболочка *всюду плотна* в H : для любого $\varepsilon > 0$ и любого $u \in H$ существуют $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $\left\| u - (c_1 e_1 + \dots + c_m e_m) \right\|_H < \varepsilon$.
- 4) Гильбертово пространство H называется *сепарабельным*, если в нём существует тотальная не более чем счётная система элементов.

Сепарабельные гильбертовы пространства

Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Система ненулевых элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется

ортogonalным (ортонормированным) базисом в H , если:

- i) для любых $j, k \in \mathbb{N}, j \neq k, (e_j, e_k) = 0$ (кроме того, для любого $j \in \mathbb{N}$ $\|e_j\| = 1$);
- ii) $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ тотальна в H .

Пример. В пространстве l_2 рассмотрим систему $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящую из последовательностей $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица на j -ой позиции).

Легко видеть, что эта система есть ортонормированный базис в l_2 .

$$l_2 \ni x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots$$

Абстрактные ряды Фурье

Утверждение 2.5. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H , тогда любой элемент $u \in H$ единственным образом представим в виде (*абстрактного*) ряда Фурье

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j,$$

сходящегося в H , причём *коэффициенты Фурье* $c_j = \frac{(u, e_j)}{(e_j, e_j)},$

$(\|e_j\|c_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2$, и выполнено *равенство Парсеваля* $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2 |c_j|^2.$

Метод Ритца

Изложим *метод Ритца* построения минимизирующей функционал $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle$ последовательности.

Возьмём в сепарабельном пространстве H базис $\{e_1, e_2, \dots\}$.

Обозначим $H_m = \text{Lin}(e_1, \dots, e_m)$, $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots$

Рассмотрим конечномерную вариационную проблему (задачу оптимизации) вида

$$E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u \rangle \rightarrow \min, u \in H_m. \quad (2.8)$$

Преобразуем функционал энергии, полагая $u = \sum_{k=1}^m c_k e_k$:

Метод Ритца

$$E(u) = \sum_{k,j=1}^m (e_k, e_j)' c_k c_j - 2 \sum_{k=1}^m \langle l, e_k \rangle c_k \text{ Пусть:}$$

- $G_m = \left((e_k, e_j)' \right)_{k,j=1}^m$ — матрица Грама элементов $e_1, \dots, e_m$;
- $b^{(m)} = \left(\langle l, e_1 \rangle, \dots, \langle l, e_m \rangle \right)^T$ — известный столбец;
- $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ — столбец переменных.

Тогда для $c \in \mathbb{R}^m$ имеем $E_m(c) = c^T G_m c - 2c^T b^{(m)}$. Так как матрица Грама G_m положительно определена, то задача (2.8) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле $c^{(m)} = G_m^{-1} b^{(m)}$.

Метод Ритца: сходимость минимизирующей последовательности

В самом деле, необходимое условие экстремума квадратичной функции $\mathbb{R}^m \ni c \mapsto E_m(c) = c^T G_m c - 2c^T b^{(m)}$ имеет вид $2G_m c^{(m)} - 2b^{(m)} = \nabla E_m(c^{(m)}) = 0$, а поскольку $G_m > 0$, то $c^{(m)} = G_m^{-1} b^{(m)}$ и выполнено достаточное условие минимума: $d^2 E_m = 2dc^T G_m dc > 0$.

Мы построили последовательность $u_m = c_1^{(m)} e_1 + \dots + c_m^{(m)} e_m$, которая называется *последовательностью Ритца*.

Утверждение 2.6. Последовательность Ритца сходится к экстремали $u^\star$ функционала энергии.

Метод Ритца: сходимость минимизирующей последовательности

Доказательство. Имеем $H_1 \subset H_2 \subset \dots$, откуда следует, что $E(u_1) \geq E(u_2) \geq \dots$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $c'_1(\varepsilon), \dots, c'_m(\varepsilon)$, что $\|u^\star - u'_m(\varepsilon)\| \leq \varepsilon$, где $u'_m(\varepsilon) = c'_1(\varepsilon)e_1 + \dots + c'_m(\varepsilon)e_m$. Можно показать (упражнение): существует константа $C > 0$,



Walther Ritz (1878 – 1909)

Метод Ритца: сходимость минимизирующей последовательности

не зависящая от ε и, следовательно, m , что выполнено неравенство $E(u'_m(\varepsilon)) \leq \mu + C\varepsilon$, где $\mu = E(u^\star)$. Но $\operatorname{argmin}_{u \in H_m} E(u) = u_m$, поэтому для всех $k \geq m$, $\mu \leq E(u_k) \leq \mu + C\varepsilon \Rightarrow E(u_k) \rightarrow \mu$, если $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. $k \rightarrow \infty \Rightarrow \{u_k\}_{k=1}^\infty$ — минимизирующая последовательность. Утверждение 2.6 доказано.

Функционал энергии задачи Дирихле

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения с дивергентным оператором $\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Функционал энергии задачи (2.9) имеет вид

$$E_D(u) = b_{\mathcal{L}}(u, u) - 2 \int_{\Omega} f(x)u dx, \quad (2.10)$$

где $b_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx$ — симметрическая

билинейная форма, ассоциированная с оператором $\mathcal{L}$.

Экстремаль функционала энергии задачи Дирихле

Утверждение 2.7. Предположим, что функционал энергии (2.10) имеет глобальную экстремаль $u^\star$, доставляющую ему минимум на множестве $\left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$, причём $u^\star \in C^2(\overline{\Omega})$.

Тогда $u^\star$ есть решение задачи (2.9).

Доказательство. Повторяя рассуждения из начала темы, но уже для оператора $\mathcal{L}$, получим для любой вариации $\delta u \in C^1(\overline{\Omega})$,

$\delta u|_{\partial\Omega} = 0$, необходимое условие экстремали в виде

$$\int_{\Omega} \left(A(x) \nabla u^\star \cdot \nabla \delta u + c(x) u^\star \delta u \right) dx - \int_{\Omega} f(x) \delta u dx = 0. \quad (2.11)$$

Модифицированный функционал энергии

Применяя один раз формулу интегрирования по частям, получим из (2.11)

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u^* - f(x)) \delta u dx = 0, \text{ в частности, для любой вариации } \delta u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отсюда по лемме 2.1 $\mathcal{L}u^* = f$ в Ω . Утверждение 2.7 доказано.

Рассмотрим всё пространство $C^1(\overline{\Omega})$, не предполагая, что функции удовлетворяют условию Дирихле на границе, и определим на нём *модифицированный функционал энергии*

$$\tilde{E}_D(u) = b_{\mathcal{L}}(u, u) + \int_{\partial\Omega} |u|_{\partial\Omega} - \varphi(x)|^2 ds - 2 \int_{\Omega} f(x)u dx.$$

Нетрудно показать, что экстремаль функционала $\tilde{E}_D$ на $C^1(\overline{\Omega})$ совпадает с экстремалью функционала (2.10) на $\left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$.

Функционал энергии задачи Робена

Рассмотрим внутреннюю задачу Робена для уравнения с дивергентным оператором $\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $\sigma \in C(\partial\Omega)$. С задачей (2.12) свяжем функционал энергии вида

$$E_R(u) = W(u, u) - 2 \left(\int_{\Omega} f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u \Big|_{\partial\Omega} ds \right), \quad (2.13)$$

Экстремаль функционала энергии задачи Робена

где W — симметрическая билинейная форма Робена, имеющая вид

$$W(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} ds.$$

Утверждение 2.8. Предположим, что функционал энергии (2.13) имеет глобальную экстремаль u^* , доставляющую ему минимум в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$, причём $u^* \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда u^* — решение задачи (2.12).

Доказательство. Обозначим $\langle l, u \rangle = \int_{\Omega} f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u|_{\partial\Omega} ds$.

Рассмотрим вариацию $\delta u \in C^1(\overline{\Omega})$, число $t \in \mathbb{R}$, тогда приращение функционала энергии (2.13)

Экстремаль функционала энергии задачи Робена

$$0 \leq E(u^* + t\delta u) - E(u^*) = W(\delta u, \delta u)t^2 + 2t(W(u^*, \delta u) - \langle l, \delta u \rangle).$$

Отсюда для любой $\delta u \in C^1(\overline{\Omega})$ $W(u^*, \delta u) - \langle l, \delta u \rangle = 0$, т.е.

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla u^* \cdot \nabla \delta u + c(x)u^* \delta u - f(x)\delta u) dx + \\ + \int_{\partial\Omega} \left(\sigma(x)u^* \Big|_{\partial\Omega} \delta u \Big|_{\partial\Omega} - \varphi(x)\delta u \Big|_{\partial\Omega} \right) ds = 0.$$

Применяя один раз формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u^* - f(x)) \delta u dx + \int_{\partial\Omega} (A(x) \nabla u^* \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u^* - \varphi(x)) \delta u \Big|_{\partial\Omega} ds = 0.$$

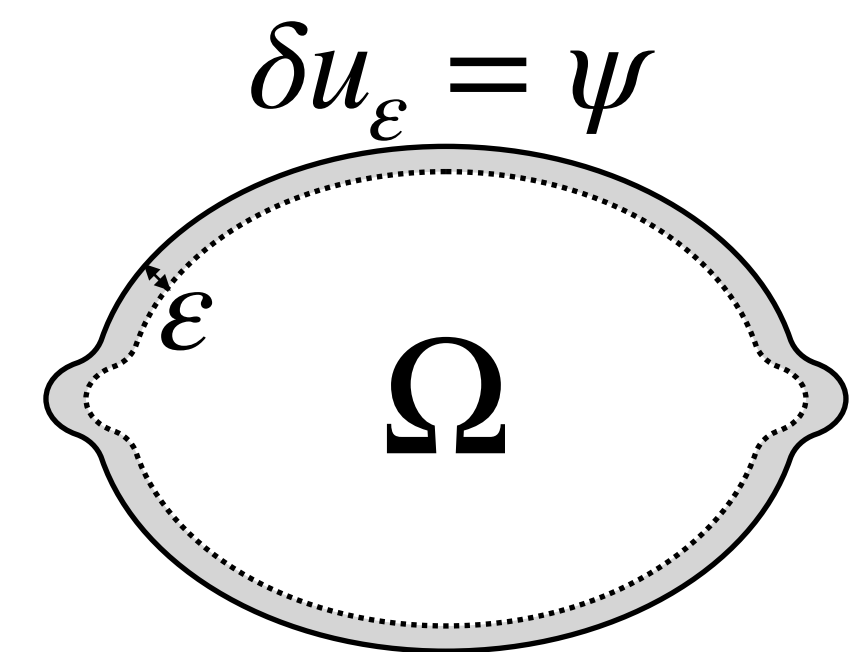
(2.14)

Экстремаль функционала энергии задачи Робена

1) Имеем для любой $\delta u \in C_0^\infty(\Omega) \int_{\Omega} (\mathcal{L}u^\star - f(x)) \delta u dx = 0$. По лемме Дюбуа-Реймона $\mathcal{L}u^\star - f(x) = 0$ в Ω . Получили уравнение задачи Робена (2.12).

Лемма 2.2 (о поднятии). Пусть $\psi \in C^1(\partial\Omega)$ — произвольная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\delta u_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ со свойствами:

а) $\delta u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = \psi$; б) для любой $x \in \text{supp } \delta u_\varepsilon$
 $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon$; в) $\|\delta u_\varepsilon\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_\psi$.



Экстремаль функционала энергии задачи Робена

В частности, мера (n -мерный объём) носителя $\text{supp } \delta u_\varepsilon$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция δu_ε называется *поднятием* ψ .

2) Пусть $\psi \in C^1(\partial\Omega)$, $\delta u_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ — её поднятие, тогда справедлива

оценка
$$\left| \int_{\Omega} (\mathcal{L}u^\star - f(x)) \delta u_\varepsilon dx \right| \leq C_\psi \max_{\overline{\Omega}} |\mathcal{L}u^\star - f| \cdot$$

$\cdot \text{mes}(\text{supp } \delta u_\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, предельный переход в формуле (2.14), записанной для δu_ε , даёт

$$\int_{\partial\Omega} (A(x) \nabla u^\star \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u^\star - \varphi(x)) \psi ds = 0 \text{ для любой } \psi \in C^1(\partial\Omega). \text{ Но}$$

тогда по лемме Дюбуа-Реймона $A(x) \nabla u^\star \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u^\star \Big|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Сильные решения краевых задач

Снова рассмотрим задачу Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Обозначим граничный оператор краевой задачи (2.9) (оператор следа) через $\mathcal{B}$, а саму задачу — через $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$. Рассмотрим оператор

$$L : H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega),$$

действующий на функции из $H^2(\Omega)$ следующим образом:

$H^2(\Omega) \ni u \mapsto (\mathcal{L}u, \mathcal{B}u) \in L_2(\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega)$, где $H^{3/2}(\partial\Omega)$ — образ оператора следа $\cdot|_{\partial\Omega} : H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$.

Сильные решения краевых задач

Тогда *сильным решением* задачи Дирихле (2.9) с правыми частями $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ будем называть такую функцию $u \in H^2(\Omega)$, что $Lu = (f, \varphi)$.

Для задачи Робена (2.12) рассмотрим оператор $H^2(\Omega) \ni u \mapsto Lu = (\mathcal{L}u, \mathcal{B}u) \in L_2(\Omega) \oplus L_2(\partial\Omega)$, где граничный оператор $\mathcal{B}u = A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega}$. *Сильным решением* задачи

Робена (2.12) с правыми частями $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ будем называть такую функцию $u \in H^2(\Omega)$, что $Lu = (f, \varphi)$.

Проблема: из вариационной теории не следует, что краевые задачи имеют сильные решения...

Формула интегрирования по частям

Основным инструментом исследования краевых задач, как и прежде, служит формула интегрирования по частям теперь для функций из пространства Соболева.

Утверждение 2.9. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u, v \in H^1(\Omega)$, $\vec{\nu}$ — поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx = \int_{\partial\Omega} u \big|_{\partial\Omega} \nu_j ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_j} dx. \quad (2.15)$$

Действительно, по теореме о плотности (пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $H^1(\Omega)$, если $\partial\Omega \in C^1$) существуют последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\} \subset H^1(\Omega)$, сходящиеся в $H^1(\Omega)$ к u, v , соответственно.

Первая формула Грина

Но тогда, очевидно, можно сделать предельный переход в классической формуле интегрирования по частям и получить формулу (2.15).

Из формулы интегрирования по частям следует *первая формула Грина* для дивергентного оператора

$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u$ в пространстве Соболева:

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L}u dx = - \int_{\partial\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu}) v ds + b_{\mathcal{L}}(u, v). \quad (2.16)$$

Здесь: $A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu}$ — A -нормальная производная,

Определение обобщённых решений: дивергентные операторы

$$b_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx \text{ — симметрическая}$$

билинейная форма, ассоциированная с оператором $\mathcal{L}$.

Существуют два способа определить обобщённые решения задачи Дирихле для уравнения с дивергентным оператором

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi : \end{cases} \quad (2.9)$$

- 1) Обобщённое решение — это функция $u \in H^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, удовлетворяющая необходимому условию экстремали функционала энергии (2.10).

Определение обобщённых решений: дивергентные операторы

2) Применить к сильному решению $u \in H^2(\Omega)$ первую формулу Грина (2.16), интерпретировать результат как определение обобщённого решения $u \in H^1(\Omega)$ задачи Дирихле (2.9).

Определение 2.5. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Дирихле (2.9) для дивергентного равномерно эллиптического уравнения второго порядка, если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и с любой *пробной функцией* $\delta u = v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство

$$b_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} f(x)v dx. \quad (2.17)$$

Обобщённое решение задачи Робена

Рассмотрим теперь задачу Робена (2.12). Ещё раз выпишем

$$W(u, v) = b_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} ds — симметрическую$$

билинейную форму Робена.

Определение 2.6. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Робена (2.12), если для любой *пробной функции* $\delta u = v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство

$$W(u, v) = \int_{\Omega} f(x) v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v|_{\partial\Omega} ds. \quad (2.18)$$

Общий равномерно эллиптический оператор

Приступаем к определению обобщённых решений краевых задач для общего равномерно эллиптического оператора второго порядка, представленной в дивергентной форме

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + \operatorname{div} (\vec{b}(x)u) + c(x)u, \quad (2.19)$$

где переменная матрица A и функция c такие же, как и для дивергентного оператора, т.е. $A(x) = \left(a_{ij}(x) \right)_{i,j=1}^n$ равномерно положительно определена, $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$, $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + \dots + b_n \vec{e}_n$, $b_j \in C^1(\overline{\Omega})$.

Формально сопряжённый оператор

Формально сопряжённый оператор к оператору (2.19) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*v &= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) - \vec{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u = \\ &= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) - \operatorname{div} (\vec{b}(x)u) + (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)) u.\end{aligned}$$

Умножим эллиптическое уравнение $\mathcal{L}u = f$ на пробную функцию $v \in H^1(\Omega)$ и преобразуем левую часть с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx - \int_{\Omega} u (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx + \\ &+ \int_{\partial\Omega} uv \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} ds - \int_{\partial\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu}) v ds = \int_{\Omega} f(x)v dx. \quad (2.20)\end{aligned}$$

Определение обобщённого решения задачи Дирихле

Снова введём обозначение: $b_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx$.

Пусть $v|_{\partial\Omega} = 0$, тогда интегральное равенство (2.20) примет вид

$$b_{\mathcal{L}}(u, v) - \int_{\Omega} u \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = \int_{\Omega} f(x)v dx. \quad (2.21)$$

Определение 2.7. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Дирихле (2.9) с общим равномерно эллиптическим оператором (2.19), если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено равенство (2.21).

Определение обобщённого решения задачи Робена

Из краевого условия Робена следует, что $A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) - \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega}$.

Подставим в интегральное равенство (2.20) выражение для A - нормальной производной и перепишем его следующим образом:

$$W(u, v) - \int_{\Omega} u \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = \int_{\Omega} f(x)v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)v \Big|_{\partial\Omega} ds, \quad (2.22)$$

где $W(u, v) = b_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \left(\sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} \right) u \Big|_{\partial\Omega} v \Big|_{\partial\Omega} ds$.

Определение 2.8. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Робена (2.12) с общим равномерно эллиптическим оператором (2.19), если для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ выполнено равенство (2.22).

Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов
4. Методы решения краевых задач

Корректность по Адамару

Вспомним определение корректно поставленной краевой задачи на примере внутренней задачи Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Пусть $\mathcal{U}$ — пространство решений (в том или другом смысле) задачи (2.9), $\mathcal{F}$ — пространство правых частей (данных) задачи Дирихле. В пространствах $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ задана топология или фиксирован класс сходящихся последовательностей. Краевая задача (2.9) задаёт линейный оператор $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$, возможно определённый не на всём $\mathcal{U}$.

Корректность по Адамару

Например, $\mathcal{U} = H^2(\Omega)$ — пространство сильных решений,
 $\mathcal{F} = L_2(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial\Omega)$ — пространство данных задачи (2.9).

Задача Дирихле тогда есть линейный оператор

$$H^2(\Omega) \ni u \mapsto \left(\mathcal{L}u, u|_{\partial\Omega} \right) \in L_2(\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega).$$

Определение. Линейная краевая задача (в частности, задача (2.9)) называется корректно поставленной (или корректной по Адамару) в классе пространств $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, если выполнены три положения:

1) *существование*: решение существует для любых данных из $\mathcal{F}$;

Корректность по Адамару

- 2) *единственность*: решение единственно в пространстве $\mathcal{U}$;
- 3) *устойчивость*: разрешающий оператор $R : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$, сопоставляющий правым частям из $\mathcal{F}$ единственное решение из $\mathcal{U}$, непрерывен.

Единственность решения линейной краевой задачи эквивалентна единственности тривиального решения задачи с нулевыми данными. Если $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ — нормированные (гильбертовы) пространства, то непрерывность оператора R означает его ограниченность. Соответствующее ограниченности неравенство называется *априорной оценкой* решения краевой задачи.

Корректность задачи Робена

Начнём с внутренней задачи Робена для уравнения с дивергентным оператором $\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \in \mathbb{R}^n, \\ A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.12)$$

Теорема 2.2. Пусть в дивергентном равномерно эллиптическом в $\overline{\Omega}$ операторе, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, коэффициент $c \geq 0$ в $\overline{\Omega}$, коэффициент в краевом условии $\sigma \geq 0$ на $\partial\Omega$, $c \neq 0$ или $\sigma \neq 0$. Тогда для каждого $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ задача (2.12) имеет единственное обобщённое решение $u^* \in H^1(\Omega)$ и верна априорная оценка

Корректность задачи Робена: доказательство

$$\| u^\star \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \left(\| f \|_{L_2(\Omega)} + \| \varphi \|_{L_2(\partial\Omega)} \right). \quad (2.23)$$

Доказательство. 1) По теореме об эквивалентной норме симметрическая билинейная форма Робена

$$W(u, v) = \int_{\Omega} \left(A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv \right) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} ds$$

задаёт скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, а норма

$\| u \|' = \sqrt{W(u, u)}$ эквивалентна стандартной норме $\| \cdot \|$

пространства Соболева. В частности, имеем неравенство

$\| v \| \leqslant \beta \| v \|'$ для всех $v \in H^1(\Omega)$.

Корректность задачи Робена: доказательство

2) Функционал энергии задачи Робена (2.12) имеет вид

$$E_R(u) = W(u, u) - 2 \left(\int_{\Omega} f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u \big|_{\partial\Omega} ds \right)$$

и удовлетворяет условиям теоремы 2.1 об экстремали.

Действительно линейный функционал

$$\langle l, u \rangle = \int_{\Omega} f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u \big|_{\partial\Omega} ds \text{ над } H^1(\Omega) \text{ ограничен, т.к.}$$

$$\begin{aligned} |\langle l, u \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|T\| \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|T\| \right) \|u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Корректность задачи Робена: доказательство

Обозначим $u^\star = \operatorname{argmin}_{u \in H^1(\Omega)} E(u)$. Необходимое условие экстремали $W(u^\star, v) - \langle l, v \rangle = 0$ для любой $v \in H^1(\Omega)$ означает, что $u^\star$ — обобщённое решение задачи Робена (2.12). Если $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ — другое обобщённое решение, то $u^\star - \tilde{u}$ удовлетворяет для любой $v \in H^1(\Omega)$ соотношению $W(u^\star - \tilde{u}, v) = 0 \Rightarrow u^\star = \tilde{u}$, единственность доказана.

3) Для вывода априорной оценки (2.23) положим $v = u^\star$ и рассмотрим цепочку неравенств:

$$\frac{1}{\beta^2} \|v^\star\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq W(u^\star, u^\star) = \langle l, v^\star \rangle \leq \|l\| \|v^\star\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow$$

Корректность задачи Робена: доказательство

$\|v^*\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta^2 \|l\| \leq \beta^2 \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|T\| \right)$. Тогда, полагая $C = \beta^2 \max \{ 1, \|T\| \}$, получим априорную оценку (2.23). Теорема 2.2 доказана.

Корректность задачи Дирихле

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения с дивергентным оператором $\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Теорема 2.3. Пусть в дивергентном равномерно эллиптическом в $\overline{\Omega}$ операторе, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, коэффициент $c \geq 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда для каждой $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ задача (2.9) имеет единственное обобщённое решение $u^\star \in H^1(\Omega)$ и верна априорная оценка

Корректность задачи Дирихле: доказательство

$$\| u^{\star} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \left(\| f \|_{L_2(\Omega)} + \| \varphi \|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \quad (2.24)$$

Доказательство. 1) Редукция: найдём такую функцию $w \in H^1(\Omega)$, что $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ (это возможно, потому что $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$). Более того, существует $C_1 > 0$, не зависящая от φ , что $\| w \| \leqslant C_1 \| \varphi \|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ (фактически речь идёт о существовании ограниченного оператора поднятия $H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$). Преобразуем функционал энергии (2.10) задачи Дирихле, подставив в него $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$:

Корректность задачи Дирихле: доказательство

$$\begin{aligned} E_D(u) &= E_D(u_0 + w) = b_{\mathcal{L}}(u_0 + w, u_0 + w) - 2 \int_{\Omega} f(x)(u_0 + w)dx = \\ &= b_{\mathcal{L}}(u_0, u_0) + 2b_{\mathcal{L}}(w, u_0) - 2 \int_{\Omega} f(x)u_0 dx + b_{\mathcal{L}}(w, w) - 2 \int_{\Omega} f(x)w dx. \end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{E}_D(u_0) = b_{\mathcal{L}}(u_0, u_0) - 2\langle l, u_0 \rangle$, где l — линейная по u_0 часть $E_D(u_0 + w)$.

2) По теореме об эквивалентной норме симметрическая билинейная форма $b_{\mathcal{L}}$, ассоциированная с оператором $\mathcal{L}$, задаёт скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму $\|u\|' = \sqrt{b_{\mathcal{L}}(u, u)}$, эквивалентную стандартной (можно взять $\sigma \equiv 1$).

Корректность задачи Дирихле: доказательство

Замечание: введём константы α и β из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|' \leq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$.

3) Функционал энергии $\tilde{E}_D$ над пространством $H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет теореме об экстремали. Действительно линейный функционал $\langle l, u_0 \rangle = \int_{\Omega} f(x)u_0 dx - b_{\mathcal{L}}(w, u_0)$ над $H_0^1(\Omega)$

ограничен, т.к. **<продолжение доказательства — упражнение>**

Фредгольмова разрешимость

Задача Дирихле (2.9) для уравнения с общим эллиптическим оператором (2.19), если $\vec{b} \neq 0$ или функция c принимает отрицательные значения, может не иметь решений или иметь бесконечно много решений, т.е. быть некорректной.

Приемлемое расширение понятия корректности фредгольмова разрешимость.

С неформальной точки зрения фредгольмова разрешимость есть однозначная разрешимость с точностью до конечномерных подпространств.

Фредгольмова разрешимость

Пусть $A : H \rightarrow H$ — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = F. \quad (2.25)$$

Оператор A фредгольмов, если:

- $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$;
- $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$.

Здесь $\operatorname{Ker} A = \{u \in H : Au = 0\}$ — ядро оператора A ,



Erik Ivar Fredholm (1866 – 1927)

Коядро и индекс

$\text{Coker } A = (\text{Im } A)^\perp$ — коядро оператора, где
 $\text{Im } A = \{f \in H : \exists u \in H, Au = f\}$ — образ оператора A .
Индексом фредгольмова оператора называется число
 $\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A$.

Замечание. Раньше в литературе было так: индекс фредгольмового оператора должен быть равен нулю, а если оператор с конечномерными ядром и коядром имеет ненулевой индекс, то он назывался *нётеровым*.

Условие на ядро означает, что однородное уравнение $Au = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений.

Теорема Фредгольма

Из условия на коядро следует, что уравнение (2.25) разрешимо, если и только если правая часть удовлетворяет конечному числу условий вида $F \perp v_j$, где $\text{Coker } A = \text{Lin}(v_1, \dots, v_d)$, $j = 1, \dots, d = \dim \text{Coker } A$. Коядро оператора A совпадает с ядром сопряженного оператора: $\text{Coker } A = \text{Ker } A^*$. Таким образом, уравнение (2.25) разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения уравнения $A^*v = 0$ имеем $(F, v)_H = 0$.

Теорема Фредгольма. Пусть H — гильбертово пространство, $K : H \rightarrow H$ — компактный оператор, $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda I + K$ есть фредгольмов оператор с нулевым индексом.

Задача Дирихле: операторное уравнение

Проблема в том, что определения 2.7 и 2.8 не сформулированы в терминах операторных уравнений. Поэтому, во-первых, следует свести краевые задачи (2.9) и (2.12) к эквивалентным (в смысле обобщённых решений) операторным уравнениям.

Начнём с задачи Дирихле (2.9). В пространстве $H_0^1(\Omega)$ введём эквивалентную норму, порождённую скалярным произведением

$$(u, v)' = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) uv dx,$$

$$\text{где } m = \max \left\{ -\min_{x \in \overline{\Omega}} c(x), 0 \right\}.$$

Задача Дирихле: операторное уравнение

Пусть $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ — заданная граничная функция. Осуществим поднятие, т.е. найдём такую функцию $w \in H^1(\Omega)$, что $w|_{\partial\Omega} = \varphi$. При этом $\|w\|' \leq C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Сделаем подстановку $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, в интегральное тождество

$$b_{\mathcal{L}}(u, v) - \int_{\Omega} u \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = \int_{\Omega} f(x) v dx \quad (2.21)$$

и перепишем его в виде

$$(u_0, v)' + \langle l_1(u_0), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle, \quad (2.26)$$

где $\langle l_1(u_0), v \rangle = -m \int_{\Omega} u_0 v dx - \int_{\Omega} u_0 \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx$.

Лемма об операторном уравнении

Лемма 2.3. Существует единственный компактный оператор $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, такой, что для всех $w \in H^1(\Omega)$ и $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle l_1(u_0), v \rangle = (Ku_0, v)'.$$

Доказательство. Проверим, что $l_1(u_0) \in H_0^1(\Omega)^*$, причём $u_0 \in L_2(\Omega)$.

Имеем
$$\begin{aligned} \left| \langle l_1(u_0), v \rangle \right| &\leq m \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\| \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \left\| |\nabla v| \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq m \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{b}\| \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \beta (m + \|\mathbf{b}\|) \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'. \end{aligned}$$

Замечание: константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|' \leq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$.

Лемма об операторном уравнении: доказательство

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u_0 \in H_0^1(\Omega)$, что $\langle l_1(u_0), v \rangle = (\tilde{K}u_0, v)'$ и $\|\tilde{K}u_0\|' = \|l_1\| \leq \beta (m + \|\mathbf{b}\|) \|u_0\|_{L_2(\Omega)}$.
 Данная конструкция даёт ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u_0 \mapsto \tilde{K}u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\|\tilde{K}\| \leq \beta (m + \|\mathbf{b}\|)$. Оператор $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ есть композиция компактного оператора вложения $j : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ и оператора $\tilde{K}$.

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & & \\ \downarrow j & \searrow K & \\ L_2(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{K}} & H_0^1(\Omega) \end{array}$$

Задача Дирихле: операторное уравнение

Хорошо известно, что композиция компактного оператора и ограниченного оператора (в любом порядке) есть компактный оператор. Единственность: если существует другой оператор $K' : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющей выводу леммы, то для любых $u_0, v \in H_0^1(\Omega)$ $(Ku_0 - K'u_0, v)' = 0 \Rightarrow Ku_0 = K'u_0$. Лемма доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 2.3, интегральное тождество (2.26) в виде

$$((I + K)u_0, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle. \quad (2.27)$$

Операторное уравнение для задачи Дирихле

Обозначим $\langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle$ и покажем, что функционал $l \in H_0^1(\Omega)^*$. Имеем

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|'_{H^1(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \\ &+ \beta \left(m + \| |\vec{b}| \|_{C(\bar{\Omega})} \right) \|w\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \\ &+ \alpha C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \beta C_1 \left(m + \| |\vec{b}| \|_{C(\bar{\Omega})} \right) \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \left(\beta \|f\|_{L_2(\Omega)} + \left(\alpha + \beta \left(m + \| |\vec{b}| \|_{C(\bar{\Omega})} \right) \right) C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \|v\|'_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H_0^1(\Omega)$, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$.

Операторное уравнение задачи Дирихле

Тогда из тождества (2.27) следует, что для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ $((I + K)u_0 - F, v)' = 0$. Отсюда получим операторное уравнение для обобщённых решений задачи Дирихле (2.9):

$$(I + K)u_0 = F. \quad (2.28)$$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов, его индекс равен нулю.

- Ядро оператора $I + K$ суть пространство обобщённых решений задачи Дирихле (2.9), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно, из $(I + K)u = 0$ следует, что $\forall v \in H_0^1(\Omega) ((I + K)u, v)' = 0$.

Ядро оператора $I + K$

Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_1(u), v \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u v dx - m \int_{\Omega} u v dx - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0$$

$$\Leftrightarrow b_{\mathcal{L}}(u, v) - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0, \text{ что совпадает с определением}$$

2.4. Из фредгольмовости следует, что $\dim \text{Ker}(I + K) = d < \infty$.

Пусть $u_1, \dots, u_d \in H_0^1(\Omega)$ — базис ядра оператора $I + K$.

- Коядро оператора $I + K$ также конечномерно, его размерность равна d ; выясним, из каких функций состоит $\text{Coker}(I + K)$.

Коядро оператора $I + K$

Имеем $\text{Coker}(I + K) = \text{Ker}(I + K^*)$, где K^* — сопряжённый оператор.

Функция $u^* \in \text{Ker}(I + K^*) \Leftrightarrow$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$ $((I + K^*)u^*, v)' = 0$.

Последнее тождество может быть переписано в виде

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u^* v dx - m \int_{\Omega} u^* v dx - \int_{\Omega} (\vec{b}(x) \cdot \nabla u^*) v dx = 0.$$

Интегрирование по частям даёт: $-\int_{\Omega} (\vec{b}(x) \cdot \nabla u^*) v dx =$

$$= \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} (\vec{b}(x) v) dx = \int_{\Omega} u^* (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx + \int_{\Omega} u^* v \operatorname{div} \vec{b}(x) dx.$$

Отсюда интегральное тождество можно переписать так:

Коядро оператора $I + K$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \left(c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \right) u^* v dx + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0.$$

Вспомним формулу для формально сопряжённого оператора:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* v &= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) - \vec{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u = \\ &= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) - \operatorname{div} (\vec{b}(x)u) + \left(c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \right) u. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$b_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \left(c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \right) u^* v dx.$$

Последнее интегральное тождество можно переписать в виде

Ядро оператора $I + K$

$$b_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0. \quad (2.29)$$

Что означает тождество (2.29)? В силу произвольности пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$, функция u^* есть обобщённое решение задачи Дирихле для формально сопряжённого оператора, имеющей вид

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* u^* = 0 \text{ в } \Omega, \\ u^*|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Задачу (2.30) называют сопряжённой к задаче (2.9).

Критерий разрешимости задачи Дирихле

Пусть $u_1^*, \dots, u_d^* \in H_0^1(\Omega)$ — базис $\text{Coker}(I + K)$, образующий максимальную линейно независимую систему обобщённых решений задачи (2.30). Получим критерий существования обобщённого решения задачи Дирихле (2.9) для общего равномерно эллиптического оператора второго порядка. Неявный вариант критерия: $F \perp u_j^*, j = 1, \dots, d$, где F — правая часть уравнения операторного уравнения (2.28). Чтобы получить явный вариант критерия разрешимости вспомним, как мы получили функцию $F \in H_0^1(\Omega)$: для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$.

Критерий разрешимости задачи Дирихле

Отсюда $(F, u_j^*)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow$
 $(f, u_j^*)_{L_2(\Omega)} - (w, u_j^*)' - \langle l_1(w), u_j^* \rangle = 0.$

В интегральном виде: $\int_{\Omega} f(x) u_j^* dx - \int_{\Omega} A(x) \nabla w \cdot \nabla u_j^* dx -$
 $-\int_{\Omega} (c(x) + m) w u_j^* dx + m \int_{\Omega} w u_j^* dx + \int_{\Omega} w \vec{b}(x) \cdot \nabla u_j^* dx = 0$ или

$\int_{\Omega} f(x) u_j^* dx - \left(b_{\mathcal{L}}(u_j^*, w) - \int_{\Omega} w \vec{b}(x) \cdot \nabla u_j^* dx \right) = 0.$ Но выражение в
 скобках равно нулю, потому что u_j^* — обобщённое решение задачи (2.30),

Теорема о фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле

$\int_{\Omega} f(x)u_j^* dx = 0$. Подведём итоги рассуждений в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$).

Теорема 2.4. Внутренняя задача Дирихле (2.9) для общего равномерно эллиптического оператора (2.19) разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи имеет конечную размерность d ; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда для каждого обобщённого решения $u^* \in H_0^1(\Omega)$ задачи (2.30) $(f, u^*)_{L_2(\Omega)} = 0$; 3) пространство обобщённых решений задачи (2.30) также имеет размерность d .

Задача Робена: операторное уравнение

Работаем с задачей Робена для общего равномерно эллиптического оператора (2.19):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ в } \Omega, \\ A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.12)$$

В пространстве $H^1(\Omega)$ рассмотрим симметрическую билинейную форму

$$(u, v)' = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) uv dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) + \mu) uv ds,$$

Задача Робена: операторное уравнение

где $m = \max \left\{ -\min_{x \in \bar{\Omega}} c(x), 0 \right\}$, $\tau(x) = \sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x)$,
 $\mu = \max \left\{ -\min_{x \in \partial\Omega} \tau(x), 0 \right\}$. Мы предполагаем, что $c \neq 0$ или $\tau \neq 0$, поэтому форма $(\cdot, \cdot)'$ есть скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной. Случай $c \equiv 0$, $\tau \equiv 0$ исследуется отдельно. Перепишем интегральное тождество (2.22) в виде

$$(u, v)' + \langle l_3(u), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (2.31)$$

Лемма об операторном уравнении

$$\text{Здесь } \langle l_3(u), v \rangle = -m \int_{\Omega} uv dx - \mu \int_{\partial\Omega} uv ds - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx,$$

$T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ — оператор следа.

Лемма 2.4. Существует единственный компактный оператор $K : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, такой, что для всех $u, v \in H^1(\Omega)$
 $\langle l_3(u), v \rangle = (Ku, v)'.$

Доказательство. Рассмотрим сначала функционал вида

$$\langle \tilde{l}_3(u), v \rangle = -m \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx. \text{ Убедимся в том, что } \tilde{l}_3(u) \in H^1(\Omega)^*:$$

Лемма об операторном уравнении: доказательство

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{l}_3(u), v \rangle| &\leq m \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \| |\vec{b}| \|_{C(\overline{\Omega})} \|u\|_{L_2(\Omega)} \| |\nabla v| \|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq m \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \| |\vec{b}| \|_{C(\overline{\Omega})} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \beta \left(m + \| |\vec{b}| \|_{C(\overline{\Omega})} \right) \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u \in H^1(\Omega)$, что $\langle \tilde{l}_3(u), v \rangle = (\tilde{K}u, v)'$ и $\|\tilde{K}u\|' = \|l_3(u)\| \leq \beta \left(m + \|\mathbf{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \right) \|u\|_{L_2(\Omega)}$.

Здесь рассуждения аналогичны тем, что были при доказательстве леммы 2.3.

Лемма об операторном уравнении: доказательство

Замечание. Константы α, β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|' \leq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$ для любой $v \in H^1(\Omega)$.

Данная конструкция определяет ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$,
 $\|\tilde{K}\| \leq \beta \left(m + \|\mathbf{b}\|_{C(\bar{\Omega})} \right).$

Осталось разобраться с членом $-\mu \int_{\partial\Omega} uv ds$, входящим в определение функционала l_3 .

Лемма об операторном уравнении: доказательство

Обозначим след на $\partial\Omega$ функции $u \in H^1(\Omega)$ через ψ и запишем оценку:

$$\left| -\mu \int_{\partial\Omega} uv ds \right| \leq \mu \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|Tv\|_{L_2(\Omega)} \leq \mu \|T\| \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$\leq \mu\beta \|T\| \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|v\|$. По теореме Рисса существует такая функция $S\psi \in H^1(\Omega)$, что для любой $v \in H^1(\Omega)$ справедливо

представление $-\mu \int_{\partial\Omega} uv ds = (S\psi, v)$. Отметим, что функция $S\psi$

совершенно не должна совпадать с функцией u , но порождается ей с помощью композиции операторов $H^1(\Omega) \xrightarrow{T} L_2(\partial\Omega) \xrightarrow{S} H^1(\Omega)$.

Операторное уравнение для задачи Робена

Положим $K = \tilde{K}j + ST$, где $j : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ — компактный оператор вложения. Для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ будем иметь

$$(Ku, v)' = (\tilde{K}u, v)' + (S\psi, v)' = \langle l_3(u), v \rangle.$$

Компактность построенного оператора K следует из компактности оператора следа. Единственность оператора K непосредственно следует из его определения. Лемма 2.4 доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 2.4, интегральное тождество (2.31) в виде

$$((I + K)u, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (2.32)$$

Оценим функционал l в правой части (2.32):

Операторное уравнение для задачи Робена

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq \beta \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \right) \|v\|'_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H^1(\Omega)$, что для всех $v \in H^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$. Следовательно, для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u - F, v)' = 0$, и операторное уравнение для обобщённых решений задачи Робена (2.12) имеет вид

$$(I + K)u = F. \quad (2.33)$$

Ядро оператора $I + K$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов.

- Ядро оператора $I + K$ состоит из обобщённых решений задачи Робена (2.12), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно,

$(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega) ((I + K)u, v)' = 0$. Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_3(u), v \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) uv dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) + \mu) uv ds - \\ - m \int_{\Omega} uv dx - \mu \int_{\partial\Omega} uv ds - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0 \Leftrightarrow$$

Коядро оператора $I + K$

$$b_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \tau(x) u v ds - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0, \text{ что совпадает с}$$

определением 2.8. Фредгольмовость означает, что $\dim \text{Ker}(I + K) = d < \infty$. Пусть $u_1, \dots, u_d \in H^1(\Omega)$ — базис ядра оператора $I + K$.

- Коядро оператора $I + K$ также конечномерно, его размерность равна d , потому что $\text{ind}(I + K) = 0$. Имеем $\text{Coker}(I + K) = \text{Ker}(I + K^*)$, где K^* — сопряжённый оператор. Функция $u^* \in \text{Ker}(I + K^*) \Leftrightarrow$ для любой $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u^*, v)' = 0$.

Коядро оператора $I + K$

Последнее тождество может быть переписано в виде

$$(u^*, v)' + (u^*, Kv)' = 0 \Leftrightarrow (u^*, v)' + \langle l_3(v), u^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u^* v dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) + \mu) u^* v ds - \\ - m \int_{\Omega} u^* v dx - \mu \int_{\partial\Omega} u^* v ds - \int_{\Omega} v \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx. \text{ Преобразуем}$$

последний интеграл:

$$- \int_{\Omega} v \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx = - \int_{\partial\Omega} u^* v \vec{b} \cdot \vec{\nu} ds + \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} (\vec{b}(x) v) dx.$$

Раскроем дивергенцию произведения:

Коядро оператора $I + K$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} v \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx = - \int_{\partial\Omega} u^* v \vec{b} \cdot \vec{\nu} ds + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx + \\
 & + \int_{\Omega} u^* v \operatorname{div} \vec{b}(x) dx. \text{ Отсюда} \\
 & \int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \left(c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \right) dx + \int_{\partial\Omega} \left(\tau(x) - \vec{b} \cdot \nu \right) u^* v ds + \\
 & + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0. \text{ Учтём вид формально сопряжённого}
 \end{aligned}$$

оператора, ассоциированную с ним форму

$$b_{\mathcal{L}}(u^*, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \left(c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \right) u^* v dx$$

Сопряжённая задача

и то, что $\tau(x) - \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x) = \sigma(x)$. Перепишем интегральное равенство в виде

$$b_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u^* v ds + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0.$$

Но в таком случае функция $u^* \in H^1(\Omega)$ есть обобщённое решение задачи Робена вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* u^* = 0 \text{ в } \Omega, \\ A(x) \nabla u^* \cdot \vec{\nu} + \tau(x) u^* \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Задачу (2.34) называют *сопряжённой* к задаче (2.12).

Критерий разрешимости задачи Робена

Отметим, что в отличие от задачи (2.30) в задаче (2.34) не только формально сопрягается оператор $\mathcal{L}$, но и изменяется граничный оператор.

Пусть $u_1^*, \dots, u_d^* \in H^1(\Omega)$ — базис в $\text{Coker}(I + K)$, образующий максимальную линейно независимую систему обобщённых решений задачи (2.34). Получим критерий существования обобщённого решения задачи Робена (2.12).

Неявный критерий суть $F \perp u_j^*, j = 1, \dots, d$, где F — правая часть операторного уравнения (2.33).

Критерий разрешимости задачи Робена

$$(F, v_j^*)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \left(f, u_j^* \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\varphi, Tu_j^* \right)_{L_2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} f(x)u_j^* dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u_j^* \Big|_{\partial\Omega} ds = 0, j = 1, \dots, d.$$

Подведём итоги исследования фредгольмовой разрешимости задачи Робена в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$).

Теорема о фредгольмовой разрешимости задачи Робена

Теорема 2.5. Если $c \neq 0$ или $\tau \neq 0$, то внутренняя задача Робена (2.12) для общего равномерно эллиптического оператора (2.19) разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи имеет конечную размерность d ; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда для каждого обобщённого решения $u^* \in H^1(\Omega)$ сопряжённой задачи (2.34) выполнено условие разрешимости

$$\int_{\Omega} f(x)u^* dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u^* \Big|_{\partial\Omega} ds = 0; \quad (2.35)$$

3) пространство обобщённых решений задачи (2.34) также имеет размерность d .

Задача Неймана для анизотропного уравнения Пуассона

Нам остался случай, когда $c(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$ и $\tau(x) = \sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x) = 0$ для всех $x \in \partial\Omega$. Оставив полный разбор этого случая слушателям, рассмотрим задачу Неймана для анизотропного уравнения Пуассона вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f \text{ в } \Omega, \\ A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.36)$$

В частности, если $A(x) \equiv E$, то (2.36) есть задача Неймана для обычного уравнения Пуассона. Имеем $c = 0$ и $\tau = 0$, поэтому теорема 2.5 не работает.

Лемма о компактном операторе K

В пространстве $H^1(\Omega)$ рассмотрим скалярное произведение $(u, v)' = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$, порождающее норму, эквивалентную стандартной. Перепишем интегральное равенство (9) из определения 2.6 следующим образом:

$$(u, v)' + \langle l_2(u), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}, \quad (2.37)$$

где $T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ — оператор следа, $\langle l_2(u), v \rangle = - \int_{\Omega} uv dx$.

Лемма 2.5. Существует единственный компактный оператор $K : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ с тем свойством, что для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ $(Ku, v)' = \langle l_2(u), v \rangle$.

Доказательство леммы о компактном операторе K

Доказательство леммы 2.5 вполне аналогично доказательству леммы 2.4. Оценка для функционала l_2 имеет вид

$$|\langle l_2(u), v \rangle| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u \in H^1(\Omega)$, что $\langle l_2(u), v \rangle = (\tilde{K}u, v)'$ и $\|\tilde{K}u\|' = \|l_2\| \leq \beta \|u\|_{L_2(\Omega)}$. Данная конструкция даёт ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$: $\|\tilde{K}\| \leq \beta$. Положим $K = \tilde{K}j$, где $j : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ — компактный оператор вложения, и для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ будем иметь

Операторное уравнение для задачи Неймана

$$(Ku, v)' = (\tilde{K}u, v)' = \langle l_2(u), v \rangle.$$

Оператор K компактен как композиция компактного и ограниченного, а его единственность следует из определяющего свойства. Лемма 2.5 доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 2.5, интегральное равенство (2.37) в виде

$$((I + K)u, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (2.38)$$

Оценим функционал $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}$:

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq \beta \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \right) \|v\|'_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Операторное уравнение для задачи Неймана

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H^1(\Omega)$, что для всех $v \in H^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$.

Следовательно, для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u - F, v)' = 0$ и операторное уравнение для обобщённых решений задачи Неймана (2.36) имеет вид

$$(I + K)u = F. \quad (2.39)$$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов. Ядро оператора $I + K$ состоит из обобщённых решений задачи Неймана (26), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$.

Ядро оператора $I + K$

Действительно, $(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega) ((I + K)u, v)' = 0$.

Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_2(u), v \rangle = 0 \Leftrightarrow$
$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Omega} uv dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx = 0.$$

Покажем, что $\text{Ker}(I + K) = \text{Lin}\{1\}$, т.е. ядро оператора $I + K$ состоит из констант. Действительно, если пробная функция

$v = u \in \text{Ker}(I + K)$, то $0 = \int_{\Omega} A(x) |\nabla u|^2 dx \geq \int_{\Omega} \gamma |\nabla u|^2 dx.$

Поэтому $\nabla u = 0$ п.в. в $\Omega \Rightarrow u = \text{const}$ в Ω , что и требовалось.

Критерий разрешимости задачи Неймана

Очевидно, что K из леммы 2.5 — самосопряжённый оператор, поэтому $\text{Coker}(I + K) = \text{Ker}(I + K^*) = \text{Ker}(I + K) = \text{Lin}\{1\}$. Неявный критерий существования решения задачи (2.36): $F \perp 1$, где F — правая часть операторного уравнения (2.39). Имеем $(F, 1)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) ds = 0. \quad (2.40)$$

Теорема 2.6. Внутренняя задача Неймана (2.36) для анизотропного уравнения Пуассона разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи состоит из констант; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (2.40) (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$).

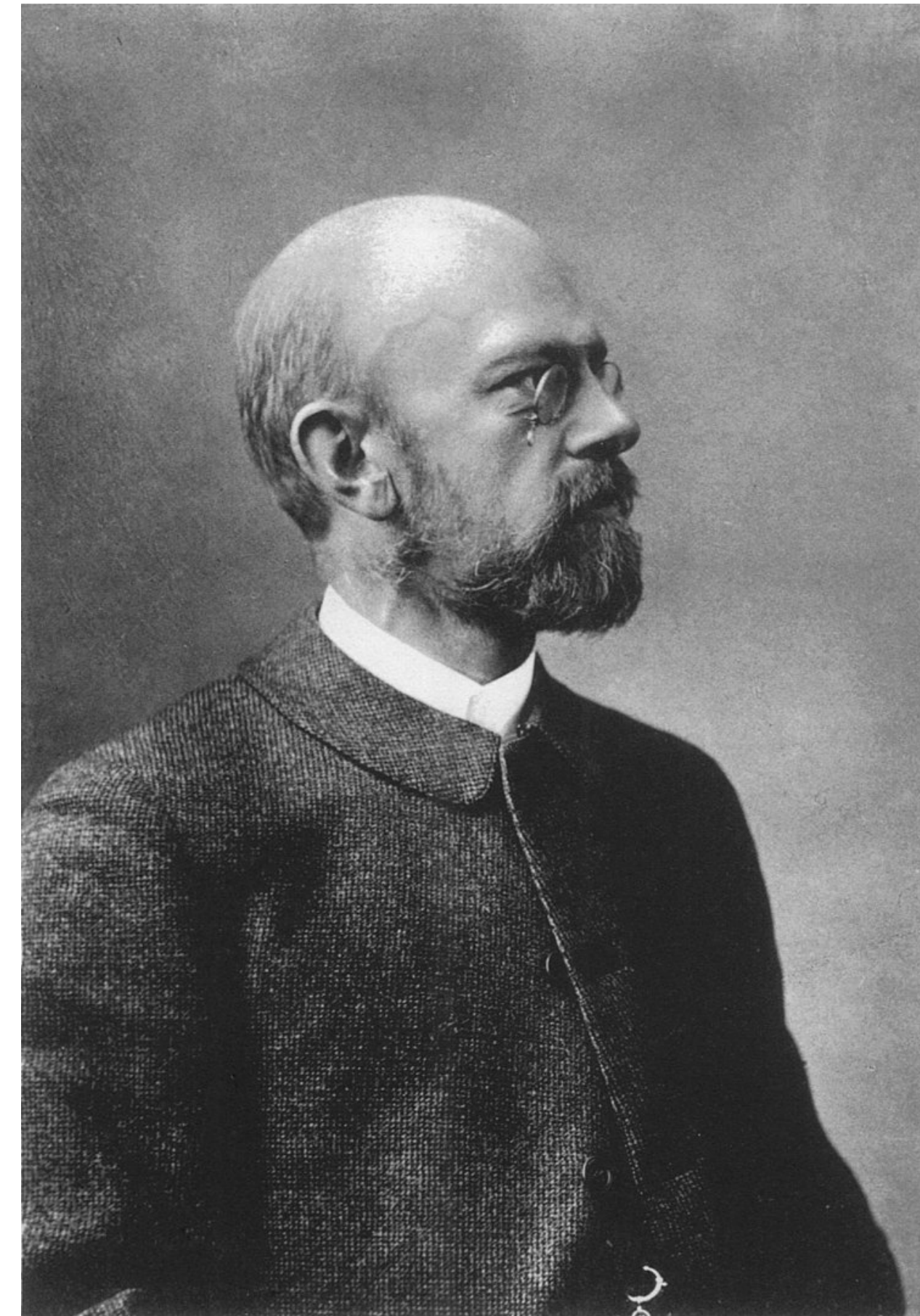
Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов
4. Методы решения краевых задач

Теорема Гильберта—Шмидта

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), $K : H \rightarrow H$ — компактный самосопряжённый оператор в H , $(\ker K)^\perp$ — ортогональное дополнение ядра K . Предположим, что $\dim(\ker K)^\perp = \infty$. Тогда

1) $\sigma(K) = \sigma_d(K) \in \mathbb{R}$, $\#\sigma(K) = \aleph_0$ (спектр оператора K дискретен, то есть состоит из собственных значений K , и представляет собой счётное ограниченное подмножество действительной прямой);



David Hilbert
(1862 — 1943)

Теорема Гильберта—Шмидта

- 2) единственная предельная точка $\sigma(K)$ есть нуль;
- 3) $\forall \lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\} \dim \ker(K - \lambda I) < \infty$, т.е. любое ($\neq 0$) собственное значение K имеет конечную кратность (это немедленно следует из теоремы Фредгольма);
- 4) пусть $\sigma(K) \setminus \{0\} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d_k = \dim \ker(K - \lambda_k I)$, $h_1^{(k)}, \dots, h_{d_k}^{(k)}$ — ортогональный базис $\ker(K - \lambda_k I)$, тогда $\left\{ h_j^{(k)} : k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d_k \right\}$ — ортогональный базис $(\ker K)^{\perp}$.

Erhard Schmidt
(1876 — 1959)



Обобщённые с.з. и с.ф.: условия Дирихле

Рассмотрим в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, дивергентный равномерно эллиптический оператор вида

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u, \quad (2.41)$$

где $A(x) = \left(a_{ij}(x) \right)_{i,j=1}^n$ — равномерно положительно определённая матрица, $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$. Поставим спектральную задачу с оператором (2.41) и условием Дирихле на границе:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u, x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Обобщённые с.з. и с.ф.: условия Дирихле

По аналогии с определением 2.5 определим обобщённые собственные значения и собственные функции спектральной задачи (2.42).

Определение 2.9. Функция $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ называется *обобщённой собственной функцией* (о.с.ф.), если существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ (обобщённое собственное значение, о.с.ф.) и для любой $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$b_{\mathcal{L}}(u, v) := \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx. \quad (2.43)$$

Замечание. Сильная с.ф., очевидно, является также и о. с. ф. При некоторых дополнительных условиях верно и обратное.

Обобщённые с.з. и с.ф.: условия Робена (условия Неймана)

Рассмотрим спектральную задачу с оператором (2.41) и условием Робена на границе:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u, x \in \Omega, \\ A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Определение 2.10. Функция $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённой собственной функцией* (о.с.ф.), если существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ (обобщённое собственное значение, о.с.ф.) и для любой $v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$W(u, v) := b_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega} v \Big|_{\partial\Omega} ds = \lambda \int_{\Omega} uv dx. \quad (2.45)$$

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора

Теорема 2.7. О.с.з. и о.с.ф. спектральной задачи Дириле (2.42) или спектральной задачи Неймана (задача (2.44) с $\sigma(x) \equiv 0$) существуют и имеют свойства:

- (i) все о.с.з. образуют счётное множество, принадлежащее действительной прямой, ограниченное снизу, не имеющее конечных предельных точек $\Rightarrow$ упорядоченная по возрастанию последовательность о.с.з. $\lambda_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$;
- (ii) каждое о.с.з. имеет конечную кратность;
- (iii) о.с.ф. u_k и u_j , отвечающие разным собственным значениям λ_k и λ_j , ортогональны в пространстве $L_2(\Omega)$, а также в $H_0^1(\Omega)$ (для задачи Дирихле) или $H^1(\Omega)$ (для задачи Неймана) относительно эквивалентных скалярных произведений, которые будут указаны отдельно;

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора

(iv) система, которая получается объединением ортогональных базисов всех собственных подпространств, есть ортогональный базис пространства $L_2(\Omega)$, а также $H_0^1(\Omega)$ (для задачи Дирихле) или $H^1(\Omega)$ (для задачи Неймана) относительно эквивалентных скалярных произведений.

Доказательство. Будем исследовать спектральную задачу (2.42) с условием Дирихле на границе (разбор спектральной задачи Неймана делается

аналогично). **Шаг 1.** Пусть $m = \max \left\{ -\min_{x \in \overline{\Omega}} c(x), 0 \right\}$. Рассмотрим

модифицированный оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + (c(x) + m) u \quad (2.46)$$

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

и билинейную симметрическую форму

$$b_{\tilde{L}}(u, v) \equiv (u, v)' = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) uv dx, \quad (2.47)$$

которая по теореме об эквивалентной норме есть скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева. Тогда интегральное тождество в определении 2.9 можно переписать в виде

$$(u, v)' = (\lambda + m)(u, v)_{L_2}. \quad (2.48)$$

Другими словами, если λ — о.с.з. спектральной задачи (2.42) для оператора (2.41), то $\lambda + m$ — о.с.з. спектральной задачи Дирихле для модифицированного оператора с той же о.с.ф.

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

Шаг 2. Рассмотрим в пространстве $H_0^1(\Omega)$ линейный функционал

$$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx.$$

Этот функционал ограниченный, что немедленно следует из неравенства Коши—Буняковского и теоремы об эквивалентной норме. По теореме Рисса $\exists! U \in H_0^1(\Omega)$ с тем свойством, что $(u, v)_{L_2(\Omega)} = (U, v)'$ для всех $v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow$ тождество (2.48) можно переписать так: $(u, v)' = (\lambda + m)(U, v)' \Leftrightarrow (u - (\lambda + m)U, v)' = 0$ для всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Отсюда следует, что $u = (\lambda + m)U$.

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

Шаг 3. Исследуем операторное уравнение $u = (\lambda + m)U$ в $H_0^1(\Omega)$. Имеем оператор $H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto Ku = U \in H_0^1(\Omega)$. По теореме о компактности оператор K компактен, потому что он представляет собой композицию компактного оператора вложения $j : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ и ограниченного оператора $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$. Операторное уравнение принимает вид $(\lambda + m)Ku = u \Leftrightarrow$
$$Ku = \frac{1}{\lambda + m}u = \nu u.$$
 Кроме того, K — самосопряжённый оператор: для любых $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ имеем
$$(Ku_1, u_2)' = (u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = (u_2, u_1)_{L_2(\Omega)} = (Ku_2, u_1)' = (u_1, Ku_2)'.$$

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

Итак, с.ф. компактного оператора K идентичны о.с.ф. модифицированного оператора (2.46), следовательно, оператора (2.41), а собственные значения оператора K обратны о.с.з. $\tilde{\mathcal{L}}$. Все свойства о.с.з. и о.с.ф. спектральной задачи (2.42) следуют из теоремы Гильберта—Шмидта и простого наблюдения, что K — положительно определённый оператор. О.с.ф. u_k и u_j , отвечающие разным собственным значениям λ_k и λ_j , ортогональны в пространстве $H_0^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения (2.47). Базис в пространстве $H_0^1(\Omega)$ есть базис в $L_2(\Omega)$, поскольку $H_0^1(\Omega)$ (и даже $C_0^\infty(\Omega)$) всюду плотно в $L_2(\Omega)$. Теорема 2.7 доказана.

Разложение функций в ряд по с.ф.

Упражнение. Получить аналогичное доказательство для спектральной задачи (2.44) с условием Неймана на границе.

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис о.с.ф. в пространстве $L_2(\Omega)$. Подставим $u = v = u_k$ в равенство (2.48):

$$\|u_k\|^2 = (\lambda_k + m) \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 = \lambda_k + m = \frac{1}{\nu_k} > 0 \Rightarrow$$

$\left\{ v_k = \frac{u_k}{\omega_k} = \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис $H_0^1(\Omega)$. Если

функция $w \in H_0^1(\Omega)$, то её можно разложить в ряд Фурье вида

Разложение функций в ряд по с.ф.

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (w, v_k)' v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(w, \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right)' \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}};$$

имеет место равенство Парсеваля—Стеклова: $\|w\|^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(w, \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right)' \right|^2. \text{ С другой стороны, } w \in L_2(\Omega), \text{ поэтому}$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (w, u_k)_{L_2(\Omega)} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} w_k u_k \Rightarrow \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^2. \text{ Поэтому}$$

Разложение функций в ряд по с.ф.

$$\begin{aligned} \|w\|'^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k + m} \left| (w, u_k)' \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + m) |w_k|^2 = m \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |w_k|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |w_k|^2 \leq \|w\|'^2 - m \|w\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты Фурье (относительно $L_2(\Omega)$) функций из $H_0^1(\Omega)$ имеют то свойство, что сходится не только ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^2$, но и ряд с весовыми коэффициентами вида $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |w_k|^2$.

Что осталось за кадром?

- Вариационный метод решения спектральной задачи
- Гладкость обобщённых решений краевых задач (когда обобщённые решения оказываются сильными / классическими?)
- Гладкость собственных функций дивергентных эллиптических операторов
- Теорема Г. Вейля об асимптотике собственных значений

Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов
4. Методы решения краевых задач

Методы решения краевых задач

- Метод функции Грина
- Метод спектрального разложения
- Вариационный метод
- Метод разделения переменных
- Проекционные методы

Метод функции Грина был рассмотрен в первой части курса.

Вариационный метод, метод разделения переменных рассматриваются на практических занятиях. Проекционные методы будут рассмотрены при изучении эволюционных задач в конце семестра.