

Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка

1. Линейные уравнения первого порядка

Задача 3.1. Решить задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = -xy, \\ u|_{x=2} = y^2 + 1, \quad -\infty < y < \infty. \end{cases}$$

Решение.

$$1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = -xy \Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy.$$

Составим систему характеристик (точка означает производную по фазовому времени p):

$$\text{нормальная форма Коши} \text{ — } \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{u} = u - xy; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy} \text{ — симметрическая форма Коши.}$$

- 2) Найдём общее решение системы характеристик: $x = x_0 e^p$, где $x_0 = x(0)$; $y = y_0 e^p$, где $y_0 = y(0)$. Подставим в третье уравнение: $\dot{u} = u - x_0 y_0 e^{2p} \Leftrightarrow \dot{u} - u = -x_0 y_0 e^{2p}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $u = C e^p$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $u = A e^{2p}$. Подстановка даёт $A = -x_0 y_0$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения есть $u = C e^p - x_0 y_0 e^{2p}$. $p = 0$: $u_0 = u(0) = C - x_0 y_0 \Rightarrow C = u_0 + x_0 y_0$. $u = (u_0 + x_0 y_0) e^p - x_0 y_0 e^{2p}$. Общее решение системы характеристик есть

$$\begin{cases} x = x_0 e^p, \\ y = y_0 e^p, \\ u = (u_0 + x_0 y_0) e^p - x_0 y_0 e^{2p}. \end{cases}$$

Для нахождения интегрируемых комбинаций применяется следующее свойство равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = t, \text{ то при любых коэффициентах}$$

$k_1, \dots, k_n$ (хотя бы один из которых не равен нулю) имеем

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots k_n b_n} = t.$$

3) Найдём первый независимый интеграл: $\frac{\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy}{1 - 1} = dp$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \Leftrightarrow d(\ln|x| - \ln|y|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln|x| - \ln|y| = \tilde{C}_1 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\tilde{C}_1 \Leftrightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = e^{-\tilde{C}_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \pm e^{-\tilde{C}_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1. \text{ Заметим, что } y = 0 \text{ —}$$

инвариантная плоскость, поэтому $C_1 = 0$ — допустимое значение константы. Найдём другой интеграл,

независимый от найденного выше:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y dx + x dy + du}{yx + xy + u - xy} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{d(u + xy)}{u + xy} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(u + xy)}{u + xy} - \frac{dx}{x} = 0 \Leftrightarrow d \ln|u + xy| - d \ln|x| = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{u + xy}{x} = C_2. \text{ При } C_2 = 0: u + xy = 0 \text{ — инвариантная}$$

поверхность.

4) Запишем общее решение уравнения в параметрическом виде. Для этого рассмотрим задачу Коши общего вида

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} - u = -xy, \\ u|_{x=2} = \varphi(y). \end{cases}$$

Пусть $x_0 = 2, y_0 \in (-\infty, +\infty)$, тогда $u_0 = \varphi(y_0)$. Общее решение системы характеристик в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = 2e^p, \\ y = y_0 e^p, \\ u = (\varphi(y_0) + 2y_0)e^p - 2y_0 e^{2p}, \\ -\infty < p < +\infty, -\infty < y_0 < +\infty. \end{cases}$$

Мы получили общее решение уравнения в параметрическом виде. $e^p = \frac{x}{2}, y_0 = \frac{y}{e^p} = \frac{2y}{x} \Rightarrow$ общее решение уравнения в частных производных в явном виде:

$$u = \left(\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{4y}{x} \right) \frac{x}{2} - \frac{y}{x} x^2 = \frac{x}{2} \varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y - xy. \text{ Оно}$$

определено в полуплоскости $x > 0$.

Рассмотрим альтернативный способ получения общего решения уравнения. Для этого нужно взять нелинейную связку двух интегралов и приравнять её к нулю:

$$\Phi\left(\frac{u+xy}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{u+xy}{x} = \tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$

$$u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy \text{ — это тоже общее решение уравнения в}$$

полуплоскости $x > 0$.

$$x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y \Rightarrow \tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{2y}{x}.$$

$$\text{Пусть } \frac{y}{x} = t, \text{ тогда } \tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t) + 2t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\varphi(s) + s = \tilde{\varphi}\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(s) = 2\tilde{\varphi}\left(\frac{s}{2}\right) - 2s.$$

$$5) \quad \varphi(y) = y^2 + 1 \Rightarrow u = \frac{x}{2} \left(\frac{4y^2}{x^2} + 1 \right) + 2y - xy =$$

$$= \frac{2y^2}{x} + \frac{x}{2} + 2y - xy \text{ — решение задачи Коши.}$$

Альтернативный метод: подставим общее решение

$$u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy \text{ в начальное условие } u|_{x=2} = y^2 + 1:$$

$$y^2 + 1 = 2\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) - 2y. \text{ Замена } y = 2z \Rightarrow 2\tilde{\varphi}(z) - 4z = 4z^2 + 1$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(z) = 2z^2 + 2z + \frac{1}{2}. \text{ Имеем решение задачи Коши:}$$

$$u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy = \frac{2y^2}{x} + 2y + \frac{x}{2} - xy.$$

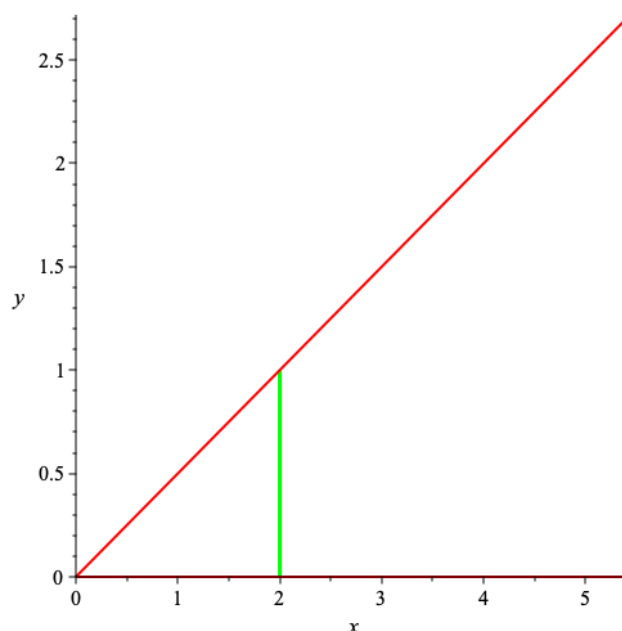
- б) Если взять всю прямую $x = 2$, то область влияния — это область определения решения задачи Коши, т.е. полуплоскость $x > 0$. Рассмотрим отрезок на этой прямой $x = 2, 0 \leq y \leq 1$. Тогда область влияния — это область существования и единственности решения задачи Коши для данного отрезка начальной прямой. Для определения области влияния следует через концы дуги начальной кривой провести проекции на плоскость независимых переменных фазовых кривых системы характеристик $\Leftrightarrow$

через концы отрезка начальной прямой провести фазовые кривые системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

Общее решение: $x = x_0 e^p$,
 $y = y_0 e^p$. Нижний конец даёт
 фазовую кривую $x = 2e^p$,
 $y = 0$ — луч,
 представляющий
 положительную часть оси x .
 Верхний конец даёт фазовую
 кривую $x = 2e^p$, $y = e^p \Rightarrow$
 $y = \frac{x}{2}$, $x > 0$ — тоже луч.

Итак, область влияния есть
 $D = \left\{ x > 0, 0 < y < \frac{x}{2} \right\}$ —
 сектор плоскости.



2. Квазилинейные уравнения первого порядка

Задача 3.2. Исследуем классические решения уравнения Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и стандартную задачу Коши для него вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u|_{t=0} = v(x). \end{cases} \quad (1)$$

Решение.

- 1) Происхождение уравнения Хопфа. Переменные Лагранжа: $x = ut + \xi$, ξ — начальная координата точки сплошной среды, u — проекция на ось Ox скорости точки сплошной

среды, x — координата точки в момент времени t .

$u = u(x, t)$ — скорость точки сплошной среды, которая в момент времени t имеет координату x . Поскольку в этой модели на точки сплошной среды силы не действуют,

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ (полная производная скорости равна нулю)} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \text{ — уравнение Хопфа.}$$

2) Система характеристик для уравнения Хопфа имеет вид

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = u, \\ \dot{u} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}.$$

Общее решение системы характеристик: $t = p + t_0$,

$$x = u_0 p + x_0, u = u_0; t_0 = t(0), x_0 = x(0), u_0 = u(0).$$

$$u = C_1 \Rightarrow dt = \frac{dx}{C_1} \Rightarrow dx - C_1 dt = 0 \Rightarrow d(x - C_1 t) = 0 \Rightarrow$$

$$x - C_1 t = C_2 \Rightarrow x - ut = C_2.$$

$I = u, J = x - ut$ — два независимых интеграла системы характеристик. Ранг матрицы Якоби

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_x & I_t & I_u \\ J_x & J_t & J_u \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -u & -t \end{pmatrix} = 2.$$

3) Найдём общее решение уравнения Хопфа в

параметрическом виде. Пусть (t_0, x_0) — произвольная точка на начальной кривой $\gamma = \{t = 0\}$, т.е. $t_0 = 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $u_0 = v(x_0) \Rightarrow (0, x_0, v(x_0)) \in \Gamma$, где Γ — график начальной функции. Параметризация интегральной поверхности:

$$\begin{cases} x = v(x_0)p + x_0, \\ t = p, \\ u = v(x_0). \end{cases} \quad (2)$$

Если $v \in C^1(\mathbb{R})$, то формула (2) даёт параметрическое общее решение уравнения Хопфа.

Общее решение уравнения Хопфа в неявном виде:

$V(u, x - ut) = 0$, где $V \in C^1$, $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ в окрестности точки

начальной кривой $\gamma \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial I} - t \frac{\partial V}{\partial J} \neq 0$ в

окрестности точки начальной кривой $\gamma \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial I} \neq 0$ в точке (в

окрестности точки) начальной кривой γ . Примеры: $V(I, J) = I \Rightarrow u = 0$ — тривиальное решение уравнения Хопфа;

$V(I, J) = J \Rightarrow x - ut = 0$, т.е. $u = \frac{x}{t}$ — частное решение

уравнения Хопфа при $t > 0$, оно не может быть решением задачи Коши (1).

4) Формулы (2) дают параметрическое решение задачи Коши. Также решение задачи Коши можно получить из неявного общего решения $V(u, x - ut) = 0$. Подстановка начального условия в неявное общее решение даёт:

$V(v(x), x) = 0$. Найдём частное нетривиальное решение

этого уравнения, удовлетворяющее условию $\frac{\partial V}{\partial I} \neq 0$. Оно

имеет вид $V(I, J) = I - v(J)$ ($v(x) - v(x) \equiv 0$). Имеем

$\frac{\partial V}{\partial I} = 1 \neq 0$ на всей γ . Таким образом, решение задачи

Коши в неявном виде представляет собой $u = v(x - ut)$.

5) Исследуем глобальную разрешимость задачи Коши для уравнения Хопфа.

- Пусть v — неубывающая функция на прямой, т.е. $v'(x) \geq 0$ при любом x . Тогда решение задачи (1) существует при любом $t \geq 0$. Действительно, рассмотрим отображение проектирования $S \ni (x, t, u) \mapsto (x, t) \in \mathbb{R}^2$, связанное с ним

отображение $\mathbb{R}^2 \ni (x_0, p) \mapsto (x, t) \in \mathbb{R}^2$ и матрицу Якоби второго отображения

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial t}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial t}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'(x_0)p + 1 & 0 \\ v(x_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан $v'(x_0)p + 1 \geq 1 > 0$ при $\forall p \geq 0$ и $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, отображение проектирования не имеет особенностей при $t \geq 0 \Rightarrow$ часть интегральной поверхности, соответствующая $t \geq 0$ однозначно проектируется на плоскость $(x, t) \Rightarrow$ классическое решение задачи (1) существует при любых $t \geq 0$.

Пример. Рассмотрим начальную функцию $v = \arctan x + v_0$.

Решение задачи Коши представляется неявной формулой $u = \arctan(x - ut) + v_0$. Очевидно, что эта функция

ограничена. Продифференцируем по x : $u_x = \frac{1 - u_x t}{1 + (x - ut)^2} \Rightarrow$
 $u_x (1 + (x - ut)^2) = 1 - u_x t \Rightarrow u_x = \frac{1}{1 + t + (x - ut)^2} > 0,$

кроме того, $u_x \leq \frac{1}{1 + t}$.

Если $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = u_{\pm}$

(при фиксированном t), то

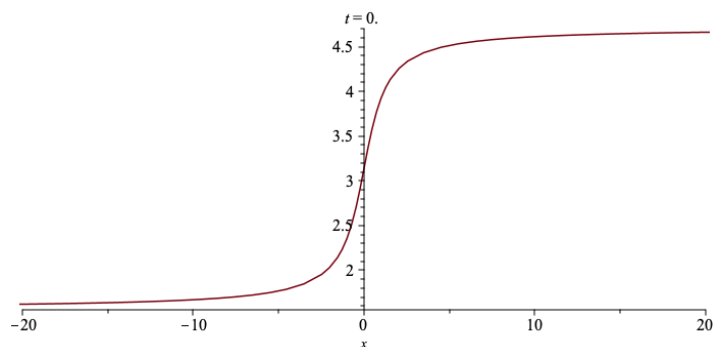
$u_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2} + v_0$. В какой

точке $u(x, t) = v_0$ (при фиксированном t)? Имеем

$v_0 = \arctan(x - v_0 t) + v_0 \Rightarrow \arctan(x - v_0 t) = 0 \Rightarrow x = v_0 t$.

Построим анимацию решения в MAPLE при $v_0 = \pi$.

- Пусть $v \in C^1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ (непрерывно дифференцируемая и ограниченная функция), но существует открытое множество на прямой, в котором $v' < 0$. Предположим, что оно связное



т.е. для $x \in (a, b)$ $v(x)' < 0$; если $x \notin (a, b)$, то $v(x)' \geq 0$.

Тогда решение задачи Коши существует в области $\Pi_{T^*} = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 < t < T^* < \infty\}$ и в некоторой точке x^* производная решения $u_x(x^*, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^* - 0$. Такая ситуация называется *градиентной катастрофой*, а T^*, x^* — временем и точкой градиентной катастрофы. Вернёмся к якобиану отображения, ассоциированного с проектированием: $v'(x_0)p + 1 > 0$ для всех $p = t \in [0, T^*)$ и $-\infty < x_0 < \infty$; $v'(x_0)p + 1 = 0$, если $T^* = -\frac{1}{v'(\hat{x})}$, где $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x_0 \in (a, b)} |v'(x_0)|$. При этом $x^* = v(\hat{x})T^* + \hat{x}$.

Пример. Рассмотрим начальную функцию

$$v = \frac{-x}{2(1+x^2)} + v_0, \quad v_0 = 1. \text{ Имеем}$$

$$v' = \frac{-2(1+x^2) + 4x^2}{4(1+x^2)^2} = \frac{x^2 - 1}{2(1+x^2)^2} < 0 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Максимум модуля производной на $(-1, 1)$ равен $\frac{1}{2}$ и он

$$\text{достигается в точке } \hat{x} = 0 \Rightarrow T^* = \frac{1}{|v'(\hat{x})|} = 2,$$

$$x^* = v(\hat{x})T^* + \hat{x} = 1 \cdot 2 + 0 = 2.$$

Задача 3.3. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = f(u), \\ u|_{t=0} = v(x), \end{cases} \quad (3)$$

где f — аналитическая функция, не имеющая особых точек на действительной прямой; $v \in C^1(\mathbb{R})$ — начальная функция.

Привести пример правой части f и начальной функции v , при которых задача Коши (3) имеет *blow-up*. Может ли

существовать blow-up, если функция f а) линейная; б) ограниченная на прямой?

Решение.

1) Система характеристик для имеет вид

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = 1, \\ \dot{u} = f(u). \end{cases}$$

Общее решение системы характеристик: $t = p + t^\circ$, $x = p + x^\circ$, $t^\circ = t(0)$, $x^\circ = x(0)$; $F(u) - F(u^\circ) = \int_{u^\circ}^u \frac{ds}{f(s)} = p$, где $u^\circ = u(0)$.

Предположим, что функция f имеет конечное число нулей $u_1, \dots, u_n$ на действительной прямой. Тогда F имеет конечное число особых точек $u_1, \dots, u_n$. На каждом интервале $(-\infty, u_1)$, (u_1, u_2) , $\dots$, (u_{n-1}, u_n) , $(u_n, +\infty)$ функция F имеет обратную. Обозначим через Φ_k — обратную для F функцию на интервале (u_k, u_{k+1}) , $k = 0, \dots, n$, $u_0 = -\infty$, $u_{n+1} = +\infty$. Тогда $F(u) - F(u^\circ) = p \Rightarrow u = \Phi_k(p + F_k(u^\circ))$, где $u(0) = u^\circ \in (u_k, u_{k+1})$. Если же $u(0) = u^\circ = u_k$ для какого-нибудь $k = 1, \dots, n$, то $u \equiv u^\circ$. Интегралы системы характеристик искать не будем.

2) Получим решение задачи Коши в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = p, \\ x = p + x^\circ, \\ u = \begin{cases} \Phi_k(p + F_k(v(x^\circ))), v(x^\circ) \in (u_k, u_{k+1}) \\ v(x^\circ), v(x^\circ) = u_k. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

- Пусть $f(u) = u^2 + 1$. Эта функция на действительной оси

корней не имеет. $\int_{u^\circ}^u \frac{ds}{1+s^2} = \arctan u - \arctan u^\circ = t \Rightarrow$

$u = \tan(t + \arctan u^\circ)$. Решение (4) имеет в этом случае вид

$$\begin{cases} t = p, \\ x = p + x^\circ, \\ u = \tan(p + \arctan v(x^\circ)). \end{cases} \quad (5)$$

Но тогда при $t \rightarrow -\arctan v(x^\circ) + \frac{\pi}{2} - 0$ $u \rightarrow +\infty$.

Пусть функция v ограничена сверху константой

$M = \sup_{x^\circ \in \mathbb{R}} v(x^\circ) < +\infty$. Тогда задача (3) имеет единственное

решение в области $\Pi_T = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$,

где $T = -\arctan M + \frac{\pi}{2} > 0$. Если функция v достигает свой

супремум в точке $\hat{x}$, то при $t \rightarrow T - 0$ решение

$u(T + \hat{x}, t) \rightarrow +\infty$, т.е. решение взрывается в точке $T + \hat{x}$.

Если правая часть третьего уравнения в системе

характеристик непрерывно дифференцируема и ограничена линейной функцией, т.е. $\exists A, B \ |f(u)| \leq A|u| + B$ для всех u ,

то решение этого уравнения существует глобально, т.е. для

всех p . Следовательно, решение задачи (3) существует

глобально при всех $t > 0$, если функция f линейная или

ограниченная на прямой; blow-up не существует.