

Задача Коши для эволюционных уравнений

Задача 1. Решить задачу Коши для двумерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + r^2 e^t, t > 0, \\ u|_{t=0} = , u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Задача 2. Решить задачу Коши для трёхмерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = x e^{-t} \cos(3y + 4z), t > 0, \\ u|_{t=0} = xy \cos z, u_t|_{t=0} = yz e^x. \end{cases}$$

Задача 3. Показать, что классическое решение задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \alpha(r), u_t|_{t=0} = \beta(r), \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, существует, если $\alpha \in C^3[0, +\infty)$, $\beta \in C^2[0, +\infty)$, $\alpha'(0) = 0$. Получить формулу для этого решения.

Задача 4. Сформулировать и доказать принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности.

Задача 5. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности по формуле Пуассона:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4} u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{2x-x^2}. \end{cases}$$

Задача 6. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности с тремя пространственными переменными:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos(xy) \sin z. \end{cases}$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Чтобы получить зачёт за пятое общее дом. задание, необходимо правильно решить любые три задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2023/24 уч.г.**

Ресурсы для решения общего дом. задания #5

1. **Материалы** к практическим занятиям по теме «Задача Коши для эволюционных уравнений».
2. **Презентация** лекционной темы #5 «Задача Коши».
3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.
5. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.