

Линейные гиперболические уравнения второго порядка

Задача 1. Найти общее решение гиперболического уравнения второго порядка на плоскости: $u_{xy} - xu_x + u = 0$.

Задача 2. Решить задачу Коши, указать область единственности и область влияния:

$$\begin{cases} xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, 0 < x < 1, \\ u|_{y=0} = x, u_y|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Указание: привести уравнение к каноническому виду, найти общее решение, затем, вернувшись к старым переменным, подставить общее решение в условия задачи Коши и найти её решение.

Задача 3. Решить задачу Гурса в указанной области:

$$\begin{cases} 2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, y > |x|, \\ u|_{y=x} = 1, u|_{y=-x} = (x+1)e^x. \end{cases}$$

Указание: привести уравнение к каноническому виду, найти общее решение, затем, вернувшись к старым переменным, подставить общее решение в условия задачи Гурса и найти её решение.

Задача 4. Рассмотрим некорректную задачу Коши на характеристике:

$$\begin{cases} u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0, \\ u|_{y=6x} = \varphi(x), u_y|_{y=6x} = \psi(x). \end{cases}$$

Привести пример таких функций $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^1)$, что эта задача а) имеет классическое решение; б) не имеет классических решений. Будет ли классическое решение в пункте а) единственным? Ответ обосновать.

Задача 5. Построить функцию Римана оператора $\mathcal{L}u = xu_{xy} + xu_x - u_y - u$ в области $x > 0, y > 0$.

Задача 6. Методом Римана решить задачу Коши для уравнения Клейна-Гордона (b — вещественный параметр):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + bu = 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#)

курса. Чтобы получить зачёт за четвёртое общее дом. задание, необходимо правильно решить любые три задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2023/24 уч.г.**

Ресурсы для решения общего дом. задания #4

1. **Материалы** к практическим занятиям по теме «Линейные гиперболические 2D уравнения второго порядка».
2. **Презентация** лекционной темы #5 «Задача Коши».
3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.
5. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.