

ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных» Тема 1 «Разделение переменных в полярных координатах»

Пусть ρ, θ — полярные координаты. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

в одной из следующих областей: круг, кольцо, полукруг, полукольцо или сектор круга. Требуется найти интегральное представление решения краевой задачи, выполнив разделение в полярных координатах. Для этого:

- 1) получить и решить спектральную задачу (задачу Штурма — Лиувилля);
- 2) представить решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, предварительно разложив в аналогичный ряд правую часть уравнения/краевого условия;
- 3) подставить этот ряд в краевую задачу и получить краевые задачи относительно коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье);
- 4) решить краевые задачи и найти коэффициенты Фурье;
- 5) получить формулу интегрального представления решения краевой задачи и просуммировать ядро;
- 6) найти коэффициенты Фурье для указанной правой части уравнения/краевого условия, представить решение в виде ряда, визуализировать приближение Фурье достаточной глубины.

Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Лапаса в секторе 30° :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\rho \Big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u \Big|_{\theta=0} = 0, \\ u \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0. \end{cases}$$

Рассмотреть следующую граничную функцию $\varphi(\theta) = 1$.

Обозначение:

$$\Omega = \left\{ x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \right\}.$$

1) Получим и решим спектральную задачу (задачу Штурма—Лиувилля).

Найдём нетривиальные гармонические функции в секторе Ω , имеющие вид $U(\rho, \theta) = Z(\rho)Y(\theta)$. Подстановка в уравнение Лапласа и краевые условия $U \Big|_{\theta=0} = 0$, $U \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0$ даёт соотношения

$$Z''(\rho)Y(\theta) + \frac{1}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta) + \frac{1}{\rho^2}Z(\rho)Y''(\theta) = 0,$$

$$Z(\rho)Y(0) = 0, Z(\rho)Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Из краевых условий и нетривиальности функций Z и Y следует, что $Y(0) = 0$, $Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda = \text{const},$$

поскольку ρ и θ — независимые переменные. Спектральная задача (задача Штурма—Лиувилля) имеет вид

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \lambda Y(\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \\ Y(0) = 0, \\ Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим задачу Штурма—Лиувилля (1). Пусть $l = \frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим три случая.

- а) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $Y'' - \omega^2 Y = 0$ есть $Y = C_1 e^{-\omega\theta} + C_2 e^{\omega\theta}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\omega l} + C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородных алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega l} & e^{\omega l} \end{vmatrix} = e^{\omega l} - e^{-\omega l} = 0. \text{ Отсюда } e^{2\omega l} = 1.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

- б) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $Y'' = 0$ есть $Y = C_1 \theta + C_2$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 l + C_2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

- с) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $Y'' + \omega^2 Y = 0$ есть $Y = C_1 \cos \omega\theta + C_2 \sin \omega\theta$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega l = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sin \omega l = 0$. Отсюда $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$, $k \in \mathbb{N}$.

Итак, собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (2) есть $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} = (6k)^2$, $k \in \mathbb{N}$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_k(x) = b_k \sin(6k\theta)$, $b_k \neq 0$.

2) Представим решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, предварительно разложив в аналогичный ряд правую часть уравнения/краевого условия.

Функция $\varphi \in L_2\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, поэтому она допускает разложение в ряд по собственным функциям из пункта 1). Это разложение имеет вид тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(6k\theta),$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формуле

$$\varphi_k = \frac{12}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi(\tau) \sin(6k\tau) d\tau, \quad (3)$$

которая следует из общей формулы для коэффициентов Фурье функции $\varphi \in L_2\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ относительно ортогонального базиса $\{e_1, e_2, \dots\}$:

$$\varphi_k = \frac{(\varphi, e_k)}{\|e_k\|^2}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в пространстве $L_2\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$; $\|\sin(6k\theta)\|^2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(6k\theta) d\theta =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(12k\theta) \right) d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в секторе 30° будем искать в виде аналогичного разложения

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho) \sin(6k\theta). \quad (4)$$

3) Подставить этот ряд в краевую задачу и получить краевые задачи относительно коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье).

Подставим ряд (4) в уравнение Лапласа и краевое условие Неймана, формально (т.е. к каждому члену ряда) применив оператор Лапласа и оператор нормальной производной на окружности:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^2 u_k'' + \rho u_k' - (6k)^2 u_k) \sin(6k\theta) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(1) \sin(6k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(6k\theta). \end{cases}$$

Приравнявая коэффициенты Фурье из правых частей равенств к соответствующим коэффициентам Фурье из левых частей, получаем уравнения и краевые условия задач для u_k .

Также мы должны позаботиться о том, чтобы отыскиваемое решение не имело особенности в центре круга, т.е. когда $\rho \rightarrow +0$. Можно апеллировать к теореме об устранимой

особенности, но мы поступим проще, потребовав от коэффициентов Фурье ограниченности при $\rho \rightarrow +0$. Отсюда краевые задачи для коэффициентов u_k имеют вид:

$$\begin{cases} \rho^2 u_k'' + \rho u_k' - (6k)^2 u_k = 0, 0 < \rho < 1, \\ u_k(\rho) = O(1) \text{ при } \rho \rightarrow +0, \\ u_k'(1) = \varphi_k, \end{cases} \quad (5)$$

4) Решим краевые задачи и найдём коэффициенты Фурье.

Общее решение уравнения Эйлера

$$\rho^2 Z'' + \rho Z' - (6k)^2 Z = 0$$

имеет вид $Z_k(\rho) = C_k \rho^{-6k} + D_k \rho^{6k}$ для $k \in \mathbb{N}$. Из

асимптотического условия задачи (5) немедленно следует,

что $C_k = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$. Тогда $Z_k(\rho) = D_k \rho^{6k}$,

$Z_k'(\rho) = 6k D_k \rho^{6k-1}$. Тогда подстановка в краевое условие

задачи (5) даёт $6k D_k = \varphi_k$, откуда $D_k = \frac{\varphi_k}{6k}$. Таким образом,

$$u_k(\rho) = \frac{\varphi_k}{6k} \rho^{6k}. \quad (6)$$

5) Получим формулу интегрального представления решения краевой задачи и просуммируем ядро.

Подставим формулы (6) для коэффициентов Фурье в ряд (4):

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{6k} \rho^{6k} \sin(6k\theta).$$

Далее подставим в последнюю формулу (3) для коэффициентов Фурье разложения граничной функции, после чего изменим порядок интегрирования и (бесконечного) суммирования:

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{6\pi k} \rho^{6k} \sin(6k\theta) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi(\tau) \sin(6k\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{6}} K(\rho, \theta, \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

где

$$K(\rho, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \rho^{6k} \sin(6k\theta) \sin(6k\tau) —$$

ядро интегральной формулы. Мне не удалось просуммировать этот ряд в MAPLE $\Rightarrow$ суммирую самостоятельно.

$$\bullet \sin(6k\theta) \sin(6k\tau) = \frac{1}{2} (\cos 6k(\theta - \tau) - \cos 6k(\theta + \tau)) \Rightarrow$$

$$K_1(\rho, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho^{6k} \cos(6k(\theta - \tau)),$$

$$K_2(\rho, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho^{6k} \cos(6k(\theta + \tau)); K = K_1 - K_2.$$

$$\bullet \text{Просуммируем ряд } K_0(\rho, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho^{6k} \cos(6k\alpha) =$$

$$= \Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} e^{k(6i\alpha + \ln \rho^6)} = \Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k, \text{ где}$$

$$q = e^{\ln \rho^6 + 6i\alpha} = \rho^6 e^{6i\alpha} = \rho^6 \cos 6\alpha + i\rho^6 \sin 6\alpha.$$

$$\bullet \text{Продифференцируем ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k \text{ по } q:$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} q^k = \frac{1}{\pi(1-q)}. \text{ Но тогда}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k = \int_0^q \frac{d\tilde{q}}{\pi(1-\tilde{q})} = -\frac{1}{\pi} \ln(1-\tilde{q}) \Big|_0^q = -\frac{1}{\pi} \ln(1-q).$$

Итак, $K_0(\rho, \theta, \tau) = \Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k = -\frac{1}{\pi} \Re \ln(1 - q) =$
 $= -\frac{1}{\pi} \ln |1 - q| = -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(1 - \rho^6 \cos 6\alpha)^2 + \rho^{12} \sin^2 6\alpha} =$
 $= -\frac{1}{2\pi} \ln (1 - 2\rho^6 \cos 6\alpha + \rho^{12}).$ Проверим корректность суммирования в [MAPLE](#), сравнив конечное выражение для K_0 с частичной суммой ряда.

$$K0 := \text{sum} \left(\frac{1}{\text{Pi} \cdot k} \cdot \rho^{6 \cdot k} \cdot \cos(6 \cdot k \cdot \alpha), k = 1 .. \text{infinity} \right);$$

$$K0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{6k} \cos(6k\alpha)}{\pi k}$$

Рассмотрим следующую частичную сумму приведённого выше ряда:

$$K0approx := \text{sum} \left(\frac{1}{\text{Pi} \cdot k} \cdot \rho^{6 \cdot k} \cdot \cos(6 \cdot k \cdot \alpha), k = 1 .. 100 \right);$$

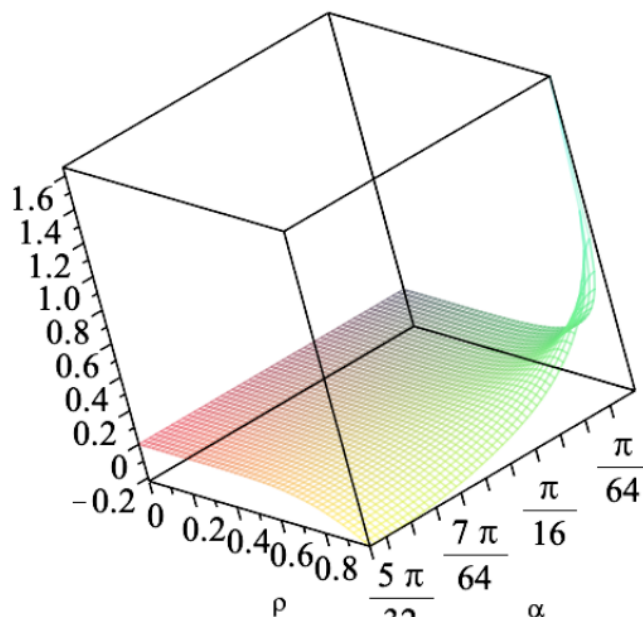
Рассмотрим конечную формулу для интегрального ядра, полученную самостоятельным суммированием:

$$K0fin := -\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \log(1 - 2 \cdot \rho^6 \cdot \cos(6 \cdot \alpha) + \rho^{12});$$

$$K0fin := -\frac{\ln(1 - 2\rho^6 \cos(6\alpha) + \rho^{12})}{2\pi}$$

Сравим графики частичной суммы и точной функции:

$$\text{plot3d} \left([K0approx, K0fin], \alpha = 0 .. \frac{\text{Pi}}{6}, \rho = 0 .. 1 \right);$$



Результат: графики неотличимы.

• Но тогда $K(\rho, \theta, \tau) = K_1(\rho, \theta, \tau) - K_2(\rho, \theta, \tau) =$
 $= -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - 2\rho^6 \cos 6(\theta - \tau) + \rho^{12}) + \frac{1}{2\pi} \ln(1 - 2\rho^6 \cos 6(\theta + \tau) + \rho^{12})$
 $= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - 2\rho^6 \cos 6(\theta + \tau) + \rho^{12}}{1 - 2\rho^6 \cos 6(\theta - \tau) + \rho^{12}}.$

6) Найдём коэффициенты Фурье для указанной правой части уравнения/краевого условия, представим решение в виде ряда, визуализируем приближение Фурье достаточной глубины.

Найдём коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta) = 1$. Имеем

$$\varphi_k = \frac{12}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(6k\tau) d\tau = -\frac{12}{6\pi k} \cos(6k\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{2}{\pi k} ((-1)^k - 1) = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k),$$

поэтому при чётных k имеем $\varphi_k = 0$, а при нечётных k — $\varphi_k = \frac{4}{\pi k}$. Таким образом, ряд Фурье для решения краевой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k} \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k) \rho^{6k} \sin(6k\theta) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{3\pi(2j+1)^2} \rho^{12j+6} \sin((12j+6)\theta). \end{aligned}$$

Визуализируем приближения Фурье в MAPLE, попробовав частичные суммы разной глубины.

Визуализируем частичную сумму ряда Фурье для решения краевой задачи. Сам ряд Фурье имеет вид

$$u := \text{sum} \left(\frac{2}{3 \cdot \text{Pi} \cdot (2 \cdot j + 1)^2} \cdot \rho^{12 \cdot j + 6} \cdot \sin((12 \cdot j + 6) \cdot \text{theta}), j = 0 \dots \text{infinity} \right);$$

$$u := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2 \rho^{12j+6} \sin((12j+6)\theta)}{3\pi(2j+1)^2}$$

Первым делом рассмотрим частичную сумму небольшой глубины.

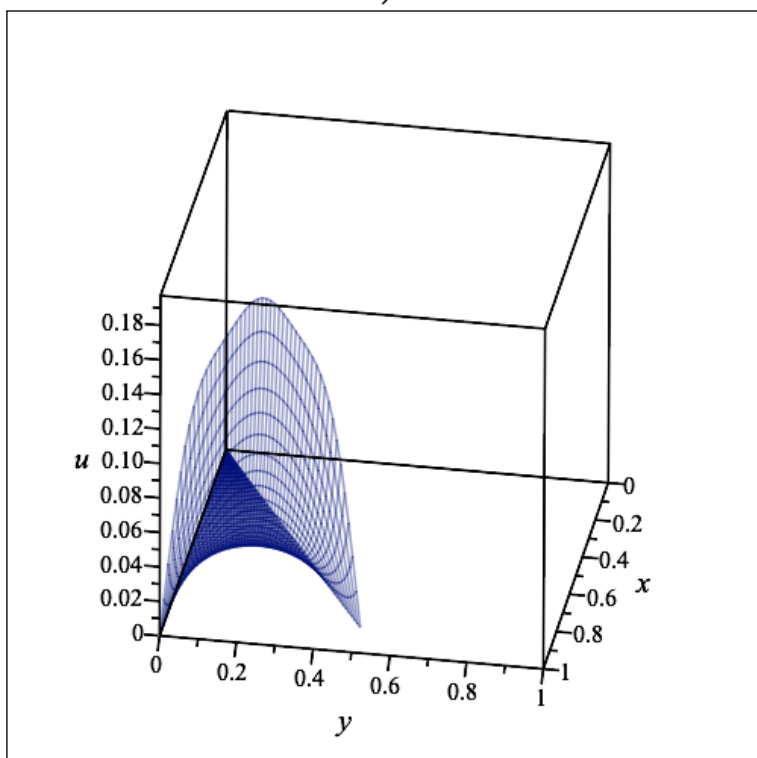
$$N1 := 3; uN1 := \sum \left(\frac{2}{3 \cdot \text{Pi} \cdot (2 \cdot j + 1)^2} \cdot \rho^{12 \cdot j + 6} \cdot \sin((12 \cdot j + 6) \cdot \text{theta}), j = 0 \dots N1 - 1 \right);$$

$$N1 := 3$$

$$uN1 := \frac{2 \rho^6 \sin(6 \theta)}{3 \pi} + \frac{2 \rho^{18} \sin(18 \theta)}{27 \pi} + \frac{2 \rho^{30} \sin(30 \theta)}{75 \pi}$$

Построим её график (обратите внимание на координаты).

$$\text{plot3d} \left([\rho \cdot \cos(\text{theta}), \rho \cdot \sin(\text{theta}), uN1], \text{theta} = 0 \dots \frac{\text{Pi}}{6}, \rho = 0 \dots 1, \text{size} = [\text{default}, \text{square}], \right. \\ \left. \text{orientation} = [13, 64, 3] \right);$$



Краевые условия Дирихле на радиусах соблюдены, но вот на дуге что-то не очень хорошее (осцилляции).

Рассмотрим частичную сумму более значительной глубины.

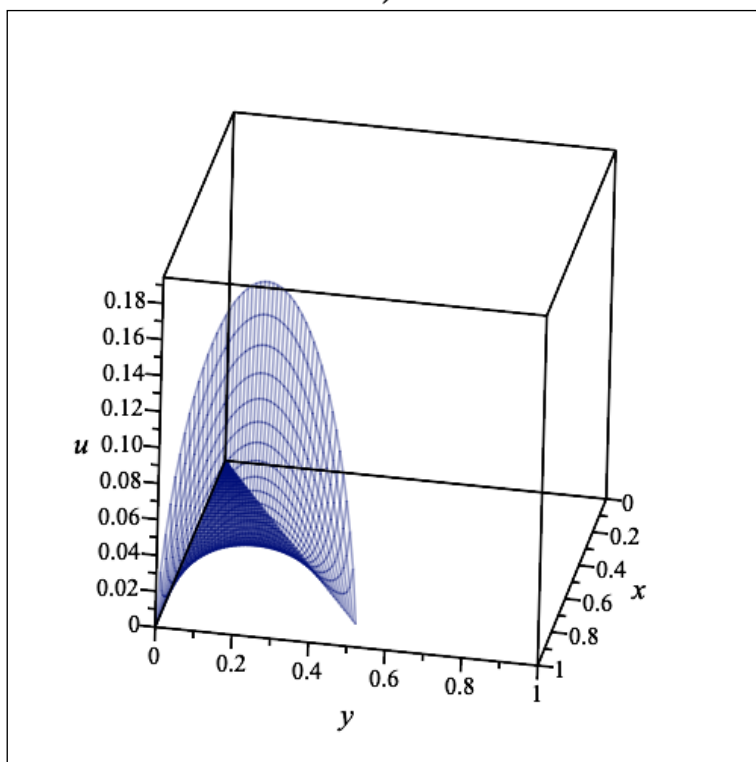
$$N2 := 30; uN2 := \sum \left(\frac{2}{3 \cdot \text{Pi} \cdot (2 \cdot j + 1)^2} \cdot \rho^{12 \cdot j + 6} \cdot \sin((12 \cdot j + 6) \cdot \text{theta}), j = 0 \dots N2 - 1 \right);$$

$$N2 := 30$$

$$uN2 := \frac{2 \rho^{42} \sin(42 \theta)}{147 \pi} + \frac{2 \rho^{30} \sin(30 \theta)}{75 \pi} + \frac{2 \rho^{90} \sin(90 \theta)}{675 \pi} + \frac{2 \rho^{66} \sin(66 \theta)}{363 \pi} \\ + \frac{2 \rho^{18} \sin(18 \theta)}{27 \pi} + \frac{2 \rho^{54} \sin(54 \theta)}{243 \pi} + \frac{2 \rho^{354} \sin(354 \theta)}{10443 \pi} + \frac{2 \rho^{294} \sin(294 \theta)}{7203 \pi} \\ + \frac{2 \rho^{306} \sin(306 \theta)}{7803 \pi} + \frac{2 \rho^{318} \sin(318 \theta)}{8427 \pi} + \frac{2 \rho^{330} \sin(330 \theta)}{9075 \pi} + \frac{2 \rho^{342} \sin(342 \theta)}{9747 \pi} \\ + \frac{2 \rho^{210} \sin(210 \theta)}{3675 \pi} + \frac{2 \rho^{222} \sin(222 \theta)}{4107 \pi} + \frac{2 \rho^{234} \sin(234 \theta)}{4563 \pi} + \frac{2 \rho^{246} \sin(246 \theta)}{5043 \pi}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 \rho^{258} \sin(258 \theta)}{5547 \pi} + \frac{2 \rho^{270} \sin(270 \theta)}{6075 \pi} + \frac{2 \rho^{282} \sin(282 \theta)}{6627 \pi} + \frac{2 \rho^{126} \sin(126 \theta)}{1323 \pi} \\
& + \frac{2 \rho^{138} \sin(138 \theta)}{1587 \pi} + \frac{2 \rho^{150} \sin(150 \theta)}{1875 \pi} + \frac{2 \rho^{162} \sin(162 \theta)}{2187 \pi} + \frac{2 \rho^{174} \sin(174 \theta)}{2523 \pi} \\
& + \frac{2 \rho^{186} \sin(186 \theta)}{2883 \pi} + \frac{2 \rho^{198} \sin(198 \theta)}{3267 \pi} + \frac{2 \rho^6 \sin(6 \theta)}{3 \pi} + \frac{2 \rho^{102} \sin(102 \theta)}{867 \pi} \\
& + \frac{2 \rho^{78} \sin(78 \theta)}{507 \pi} + \frac{2 \rho^{114} \sin(114 \theta)}{1083 \pi}
\end{aligned}$$

`plot3d([rho*cos(theta), rho*sin(theta), uN2], theta = 0 .. $\frac{\text{Pi}}{6}$, rho = 0 .. 1, size = [default, square],
orientation = [13, 64, 3]);`



Ситуация на дуге значительно улучшилась, осцилляции исчезли.