

Разделение переменных в декартовых координатах

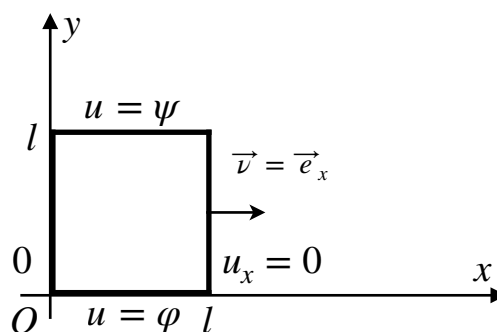
Метод разделения переменных (метод Фурье) — старейший, один из первых методов решения уравнений в частных производных. Его открыл Ж.-Б. Ж. Фурье в 1810-е годы, рассматривая задачу о нагревании железного прута. Математическая модель этого процесса включает уравнение теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$. Это уравнение параболического типа, однако не менее эффективно метод Фурье решает краевые задачи для уравнений эллиптического типа.



Жан-Батист Жозеф
Фурье
(1768 – 1830)

Задача 1.1. Наш первый пример на метод разделения переменных — краевая задача для уравнения Лапласа в квадрате вида

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < l, 0 < y < l, \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{y=0} = \varphi(x), u|_{y=l} = \psi(x). \end{cases} \quad (1)$$



Метод Фурье включает в себя два этапа. На первом необходимо получить и решить *спектральную задачу* (задачу

на собственные значения и собственные функции), на втором этапе — разложить решение по собственным функциям спектральной задачи из этапа I и найти коэффициенты разложения. Решение в методе разделения переменных всегда представляется в виде ряда Фурье, однако далее из него можно получить общую интегральную формулу.

Этап I: получить и решить спектральную задачу (задачу Штурма—Лиувилля). Рассмотрим специальную задачу

$$\begin{cases} \Delta U = 0, 0 < x < l, 0 < y < l, \\ U|_{x=0} = 0, U_x|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Найдём все нетривиальные решения данной задачи, имеющие вид $U(x, y) = X(x)Y(y)$, где X, Y — неизвестные функции одной скалярной переменной. Подстановка даёт

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0, 0 < x < l, 0 < y < l, \\ X(0)Y(y) = 0, X'(l)Y(y) = 0, y \in (0, l). \end{cases}$$

• $X(0)Y(y) = 0, X'(l)Y(y) = 0 \Rightarrow$

- 1) $Y(y) \equiv 0$ — не интересно, потому что этот случай даёт только тривиальное решение;
- 2) $X(0) = 0, X'(l) = 0$ — краевые условия будущей задачи Штурма—Лиувилля.

• $X(x)Y''(y) = -X''(x)Y(y) \Leftrightarrow \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}$. Это и есть

разделение переменных. Так как x, y — независимые переменные, то последнее уравнение имеет решение только в том случае, когда $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = \lambda$ — спектральный параметр.

Задача Штурма—Лиувилля

Собираем задачу Штурма—Лиувилля, в которой λ — неизвестный спектральный параметр:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Постановка задачи Штурма—Лиувилля: найти все такие λ , что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (2).

- λ — собственные значения задачи (2);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (2), соответствующие собственному значению λ .

Эквивалентная формулировка задачи (2):

$$X : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}, X \in L_2(0, l) \Leftrightarrow \int_0^l |X(x)|^2 dx < \infty$$

$$(X_1, X_2) := \int_0^l X_1(x)X_2(x)dx \text{ — скалярное произведение}$$

- $L_2(0, l)$ — гильбертово пространство Лебега квадратично интегрируемых функций;
- $LX = -X''$, $L : D \rightarrow L_2(0, l)$ — неограниченный, но самосопряжённый оператор;
- $C_0^\infty(0, l) = \mathcal{D}(0, l) \subset D = \{X \in C^1[0, l] : \exists X'' \in L_2(0, l), X(0) = 0, X'(l) = 0\}$ — всюду плотное подпространство в $L_2(0, l)$ (теорема о плотности);
- задача Штурма—Лиувилля — это задача на отыскание с.з. и с.ф. определённого выше оператора L : $LX = \lambda X$, $D \ni X \neq 0$.

$$\begin{aligned} X_1, X_2 \in D &\Rightarrow (X_1, L^*X_2)_{L_2(0, l)} = (LX_1, X_2)_{L_2(0, l)} = \\ &= \int_0^l -X_1''(x)X_2(x)dx = -X_1'(x)X_2(x) \Big|_0^l + \int_0^l X_1'(x)X_2'(x)dx = \end{aligned}$$

$$= X_1(x)X_2'(x) \Big|_0^l - \int_0^l X_1(x)X_2''(x)dx = (X_1, LX_2)_{L_2(0,l)} \Rightarrow L^* = L.$$

Таким образом, мы показали, что оператор L самосопряжён $\Rightarrow$ все его собственные значения действительные. Кроме того,

$\forall X \in D, X \neq 0, (LX, X)_{L_2(0,l)} = \|X'\|_{L_2(0,l)}^2 > 0$, т.е. самосопряжённый оператор L положительно определён $\Rightarrow$ все собственные значения L положительны.

Решим задачу Штурма—Лиувилля (2), для чего рассмотрим три случая.

- а) Пусть $\lambda < 0, \omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Имеем $X' = -\omega C_1 e^{-\omega x} + \omega C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -\omega C_1 e^{-\omega l} + \omega C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородных алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\omega e^{-\omega l} & \omega e^{\omega l} \end{vmatrix} = \omega(e^{\omega l} + e^{-\omega l}) = 0.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

Следовательно, отрицательных с.з. нет.

- б) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $-X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Имеем $X' = C_1$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0, C_1 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

с) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Имеем $X' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -\omega C_1 \sin \omega l + \omega C_2 \cos \omega l = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\cos \omega l = 0$ — характеристическое уравнение задачи Штурма—Лиувилля (2). Оно трансцендентно в силу

бесконечномерности задачи. Отсюда $\omega_k = \frac{\pi}{l} \left(k + \frac{1}{2} \right)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (2) есть $\lambda_k = \frac{\pi^2}{l^2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{l^2} k^2 + o(k^2)$, $k \rightarrow \infty$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = b_k \sin \omega_k x = b_k \sin \frac{\pi(k + 1/2)x}{l}, \quad b_k \neq 0.$$

Если взять $b_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$, то $\|X_k\|_{L_2(0,l)} = 1$ для всех k .

Отметим следующие свойства собственных значения и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля (2):

- (i) собственные значения образуют бесконечное (счётное) множество;
- (ii) все собственные значения действительные, неотрицательные (даже положительные);
- (iii) все собственные значения имеют конечную кратность;
- (iv) множество собственных значений не имеет конечных предельных точек;
- (v) упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений стремится к плюс бесконечности;

(vi) собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны в пространстве $L_2(0, l)$:

$$(X_k, X_j)_{L_2(0, l)} = \int_0^l X_k(x)X_j(x)dx = 0 \text{ при } k \neq j.$$

(vii) $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортогональный (ортонормированный, если $b_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$) базис пространства $L_2(0, l)$.

В теории тригонометрических рядов Фурье:

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{\pi n x}{l}, \sin \frac{\pi n x}{l}, \dots \right\} —$$

$$\text{ортогональный базис в } L_2(-l, l); \left\{ \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{\pi n x}{l}, \dots \right\}$$

— ортогональный базис в подпространстве из $L_2(-l, l)$, которое состоит из нечётных функций. Если взять произвольную функцию из $L_2(0, l)$ и продолжить её нечётным образом на интервал $(-l, l)$, то её можно разложить только по синусам. Аналогичные рассуждения работают для системы

$$\left\{ \sin \frac{\pi x}{2l}, \dots, \sin \frac{\pi(n + 1/2)x}{l}, \dots \right\}.$$

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), $K : H \rightarrow H$ — компактный самосопряжённый оператор в H , $(\ker K)^\perp$ — ортогональное дополнение ядра K . Предположим, что $\dim(\ker K)^\perp = \infty$.

Тогда

- 1) $\sigma(K) = \sigma_d(K) \in \mathbb{R}$, $\#\sigma(K) = \aleph_0$ (спектр оператора K дискретен, то есть состоит из собственных значений K , и представляет собой счётное ограниченное подмножество действительной прямой);
- 2) единственная предельная точка $\sigma(K)$ есть нуль;

- 3) $\forall \lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\} \dim \ker(K - \lambda I) < \infty$, т.е. любое ($\neq 0$) собственное значение K имеет конечную кратность (это немедленно следует из теоремы Фредгольма);
- 4) пусть $\sigma(K) \setminus \{0\} = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, $d_k = \dim \ker(K - \lambda_k I)$, $h_1^{(k)}, \dots, h_{d_k}^{(k)}$ — ортогональный базис $\ker(K - \lambda_k I)$, тогда $\{h_j^{(k)} : k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d_k\}$ — ортогональный базис $(\ker K)^{\perp}$.

Возвращение к примеру 1.1

Для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем уравнение для Y_k :

$$Y_k'' - \omega_k^2 Y_k = 0. \quad (4)$$

Его общее решение имеет вид $Y_k(y) = A_k \operatorname{ch} \omega_k y + B_k \operatorname{sh} \omega_k y$, где

A_k, B_k — постоянные интегрирования ($\operatorname{ch} \omega_k y = \frac{e^{\omega_k y} + e^{-\omega_k y}}{2}$).

Таким образом,

$$\begin{aligned} U_k(x, y) &= (A_k \operatorname{ch}(\omega_k y) + B_k \operatorname{sh}(\omega_k y)) \sin \omega_k x = \\ &= \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (k + 1/2) y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (k + 1/2) y \right) \sin \left(\frac{\pi}{l} (k + 1/2) x \right), \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что решать уравнение (4) на первом этапе метода Фурье не обязательно.

Этап II: разложить решение краевой задачи (1) в ряд Фурье (в ряд по с.ф. задачи Штурма—Лиувилля), найти коэффициенты разложения. Будем искать решение задачи (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2) с коэффициентами, зависящими от y :

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) \sin(\omega_k x), \quad (5)$$

$\omega_k = \frac{\pi}{l} (k + 1/2)$. Данный этап метода Фурье носит

формальный характер: мы не исследуем сходимость ряда (5), но допускаем его поэлементное дифференцирование (а в процессе получения интегральной формулы для решения задачи (1) — поэлементное интегрирование). Перед подстановкой разложим граничные функции $\varphi, \psi \in L_2(0, l)$ в ряд по собственным функциям задачи (2):

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \sin(\omega_k x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \sin(\omega_k x),$$

где коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$\varphi_k = \frac{(\varphi, X_k)_{L_2(0,l)}}{\|X_k\|_{L_2(0,l)}^2} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\omega_k s) ds, \quad \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(s) \sin(\omega_k s) ds. \quad (6)$$

Подстановка разложений граничных функций и ряда Фурье (5) в задачу (1) даёт

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} Y_k''(y) X_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y) X_k(x), & 0 < x < l, 0 < y < l, \\ \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k(0) = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k'(l) = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(0) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(l) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_k(x). \end{cases}$$

Сразу заметим, что соотношения $\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k(0) = 0$,

$\sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k'(l) = 0$ выполнены для любых Y_k , поскольку X_k —

с.ф. задачи (2) и удовлетворяют её краевым условиям. Далее

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(0)X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(l)X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_k(x) \Rightarrow \\
& Y_k(0) = \varphi_k, \quad Y_k(l) = \psi_k; \\
& \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Y_k''(y)X_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y)X_k''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)X_k(x) \Rightarrow \\
& \sum_{k=0}^{\infty} Y_k''(y)X_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y)(-\omega_k^2 X_k(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)X_k(x) \Rightarrow \\
& \sum_{k=0}^{\infty} (Y_k''(y) - \omega_k^2 Y_k(y)) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)X_k(x) \Rightarrow \\
& Y_k'' - \omega_k^2 Y_k = f_k(y) \text{ для всех } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} Y_k'' - \omega_k^2 Y_k = f_k(y), 0 < y < l, \\ Y_k(0) = \varphi_k, Y_k(l) = \psi_k. \end{cases} \quad (7)$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$Y_k = A_k \operatorname{ch}(\omega_k y) + B_k \operatorname{sh}(\omega_k y)$. Его подстановка в краевые условия задачи (7) даёт систему

$$\begin{cases} A_k \cdot 1 + B_k \cdot 0 = \varphi_k, \\ A_k \operatorname{ch}(\omega_k l) + B_k \operatorname{sh}(\omega_k l) = \psi_k. \end{cases}$$

Её решение: $A_k = \varphi_k$, $B_k = \frac{\psi_k - \varphi_k \operatorname{ch}(\omega_k l)}{\operatorname{sh}(\omega_k l)}$. Итак,

единственное решение задачи (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
Y_k &= \varphi_k \operatorname{ch}(\omega_k y) + \frac{\psi_k - \varphi_k \operatorname{ch}(\omega_k l)}{\operatorname{sh}(\omega_k l)} \operatorname{sh}(\omega_k y) = \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh}(\omega_k l)} \left(\psi_k \operatorname{sh}(\omega_k y) + \varphi_k \operatorname{sh}(\omega_k(l - y)) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем краевые задачи для коэффициентов Y_k :
Имеем представление решение задачи (1) в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\omega_k l)} \left(\psi_k \operatorname{sh}(\omega_k y) + \varphi_k \operatorname{sh}(\omega_k(l - y)) \right) \sin(\omega_k x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi(k + 1/2))} \left(\psi_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l}(k + 1/2)y\right) + \varphi_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{l}(k + 1/2)(l - y)\right) \right) \sin\left(\frac{\pi}{l}(k + 1/2)x\right).
\end{aligned}$$

Что дальше?

- 1) Комментарии о сходимости ряда Фурье.
- 2) Получить интегральное представление решения.
- 3) Сделать замечание о редукции.

Получим формулу интегрального представления решения.

Имеем

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \omega_k l} \left(\psi_k \operatorname{sh} \omega_k y + \varphi_k \operatorname{sh} \omega_k(l - y) \right) \sin \omega_k x = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l \operatorname{sh} \omega_k l} \left(\operatorname{sh} \omega_k y \int_0^l \psi(s) \sin \omega_k s ds + \operatorname{sh} \omega_k(l - y) \int_0^l \varphi(s) \sin \omega_k s ds \right) \sin \omega_k x = \\
&= \int_0^l K_0(s, x, y) \varphi(s) ds + \int_0^l K_1(s, x, y) \psi(s) ds, \text{ где}
\end{aligned}$$

$$K_0(s, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l \operatorname{sh} \omega_k l} \sin(\omega_k s) \sin(\omega_k x) \operatorname{sh}(\omega_k(l - y)),$$

$$K_1(s, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{l \operatorname{sh} \omega_k l} \sin(\omega_k s) \sin(\omega_k x) \operatorname{sh}(\omega_k y),$$

$\omega_k = \frac{\pi}{l} \left(k + \frac{1}{2} \right)$, $K_1(s, x, y) = K_0(s, x, l - y)$ — интегральные ядра.

Замечание: $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Сделаем замечание о редукции. Что делать, если все краевые условия неоднородные? Например, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < l, 0 < y < l, \\ u|_{x=0} = \alpha(y), u_x|_{x=l} = \beta(y), \\ u|_{y=0} = \varphi(x), u|_{y=l} = \psi(x). \end{cases} \quad (8)$$

Пусть $u = v + w$, где функция $v = v(x, y)$ есть решение задачи (1), точнее говоря,

$$\begin{cases} \Delta v = 0, 0 < x < l, 0 < y < l, \\ v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0, \\ v|_{y=0} = \varphi(x), v|_{y=l} = \psi(x). \end{cases}$$

Тогда $w = w(x, y)$ удовлетворяет задаче вида

$$\begin{cases} \Delta w = 0, 0 < x < l, 0 < y < l, \\ w|_{x=0} = \alpha(y), w_x|_{x=l} = \beta(y), \\ w|_{y=0} = 0, w|_{y=l} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Задачу (9) можно решить методом разделения переменных, при этом переменные x и y поменяются ролями.

Задача 1.2. Рассмотрим двумерную спектральную задачу в квадрате $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ вида

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, \\ -u_y|_{y=0} = 0, u_y|_{y=\pi} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Постановка задачи (10): найти все такие значения спектрального параметра λ , что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $u = u(x, y)$ — решения задачи (10).

- λ — собственные значения задачи (10);

- $u = u(x, y)$ — собственные функции задачи (10), соответствующие собственному значению λ .

Исследуем собственные значения и собственные функции задачи (10). В пространстве $L_2(\Omega)$ введём всюду плотное подпространство

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset D = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, -u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0 \right\},$$

$-\Delta : D \rightarrow L_2(\Omega)$ — неограниченный оператор. Тогда (10) $\Leftrightarrow -\Delta u = \lambda u, u \in D$.

Покажем,

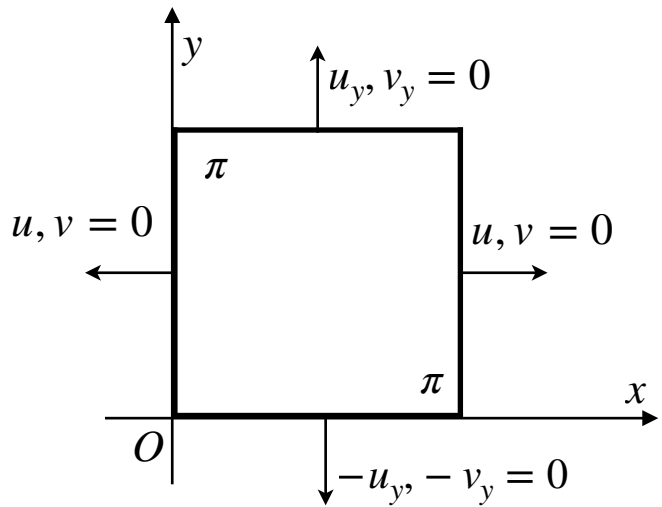
что этот оператор

самосопряжён:

для любых $u, v \in D$

вторая формула

Грина даёт



$$\begin{aligned} (-\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} &= - \iint_{\Omega} v \Delta u dx dy = \\ &= - \iint_{\Omega} u \Delta v dx dy - \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} \right) ds = (u, -\Delta v)_{L_2(\Omega)} - \\ &- \int_0^\pi \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx - \int_0^\pi \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=\pi} dy - \\ &- \int_0^\pi \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pi} (-dx) - \int_0^\pi \left(-v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} (-dy) = (u, -\Delta v)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Из самосопряжённости оператора $-\Delta : D \rightarrow L_2(\Omega) \Rightarrow$ все с.з. задачи (10) $\in \mathbb{R}$. Легко показать, что этот оператор положительно определён $\Rightarrow$ все с.з. задачи (10) > 0 .

Пойдём дальше и определим обобщённые (слабые) собственные значения и собственные функции задачи (10).

Пусть $u \in D$ — классическая с.ф., отвечающая с.з. λ .

Умножим уравнение задачи (10) на пробную функцию $v \in C^1(\overline{\Omega})$ и проинтегрируем по области Ω , один раз применив формулу интегрирования по частям (первую формулу Грина):

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} v \Delta u dx dy &\equiv \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} ds \equiv \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy - \\ &- \int_0^\pi -v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx - \int_0^\pi v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} dy - \int_0^\pi v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\pi} (-dx) - \int_0^\pi -v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} (-dy) \equiv \\ &\equiv \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy - \int_0^\pi v \Big|_{x=\pi} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} dy - \int_0^\pi -v \Big|_{x=0} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} (-dy) = \\ &= \lambda \iint_{\Omega} u v dx dy. \quad (11) \end{aligned}$$

Предположим, что пробная функция v удовлетворяет краевым условиям Дирихле задачи (10): $v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0$. Тогда равенство (11) примет вид

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \lambda \iint_{\Omega} u v dx dy. \quad (12)$$

А теперь откажемся от классических пространств непрерывно дифференцируемых функций в пользу пространств Соболева и дадим определение обобщённых с.з. и с.ф. спектральной задачи (10).

Определение. Функция $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённой (слабой) собственной функцией спектральной задачи (10), если существует λ — обобщённое с.з.:

- 1) $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ (в смысле оператора следа);
- 2) $\forall v \in H^1(\Omega), v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0$ (тоже в смысле оператора следа) выполнено интегральное равенство (12).

Получим все основные свойства обобщённых с.з. и с.ф.

Шаг 1. Обозначение:

$\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0 \right\}$. В пространстве

$\tilde{H}^1(\Omega)$ рассмотрим билинейную симметрическую форму

$$(u, v)' = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy. \quad (13)$$

По теореме об эквивалентной норме эта форма есть скалярное произведение в $\tilde{H}^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева. Напомню, что стандартное скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ имеет вид

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \iint_{\Omega} uv dx dy + \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy.$$

Шаг 2. Перепишем тождество (12) следующим образом:

$(u, v)' = \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)}$. Рассмотрим в пространстве $\tilde{H}^1(\Omega)$

линейный функционал

$$\tilde{H}^1(\Omega) \ni v \mapsto (u, v)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} uv dx dy.$$

(функция $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$ фиксирована). Этот функционал ограниченный, что немедленно следует из теоремы об эквивалентной норме. По теореме Рисса $\exists! U \in \tilde{H}^1(\Omega)$ с тем свойством, что $(u, v)_{L_2(\Omega)} = (U, v)'$ для всех $v \in \tilde{H}^1(\Omega) \Rightarrow$ тождество (12) можно переписать так: $(u, v)' = \lambda(U, v)' \Leftrightarrow (u - \lambda U, v)' = 0$ для всех $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$. Отсюда следует, что $u - \lambda U = 0$.

Шаг 3. Исследуем операторное уравнение $u - \lambda U = 0$ в $\tilde{H}^1(\Omega)$. Имеем оператор $\tilde{H}^1(\Omega) \ni u \mapsto Ku = U \in \tilde{H}^1(\Omega)$. По теореме о компактности оператор K компактен, потому что он представляет собой композицию компактного оператора вложения $j : \tilde{H}^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ и ограниченного оператора $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow \tilde{H}^1(\Omega)$. Операторное уравнение принимает вид

$\lambda Ku = u \Leftrightarrow Ku = \frac{1}{\lambda}u$. Сравним это уравнение с

эквивалентной постановкой краевой задачи: $-\Delta u = \lambda u$, $u \in D$, т.е. оператор $\tilde{K}$ можно называть левым обратным к оператору $-\Delta : D \rightarrow L_2(\Omega)$: $\tilde{K}(-\Delta) = I_D$.

Шаг 4. Покажем, что оператор K самосопряжённый. Для $u_1, u_2 \in \tilde{H}^1(\Omega)$ имеем $(Ku_1, u_2)' = (u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = (u_2, u_1)_{L_2(\Omega)} = (Ku_2, u_1)' = (u_1, Ku_2)'$. Все свойства обобщённых с.з. и с.ф. задачи (10) следуют из теоремы Гильберта—Шмидта, если перед её применением проверить, что все с.з. положительны. Отметим свойства обобщённых с.з. и с.ф. задачи (10):

- собственные значения образуют счётное множество, принадлежащее действительной прямой;
- все собственные значения положительны;
- все собственные значения имеют конечную кратность;
- множество с.з. не имеет конечных предельных точек;
- упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений стремится к плюс бесконечности;
- собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны в пространствах $L_2(\Omega)$ и $\tilde{H}^1(\Omega)$ (относительно скалярного произведения (13));
- система, которая получается объединением ортогональных базисов всех собственных подпространств, есть ортогональный базис пространств $L_2(\Omega)$ и $\tilde{H}^1(\Omega)$.

Замечание. Все обобщённые с.з. и с.ф. задачи (10) есть классические (принадлежащие подпространству D) с.з. и с.ф. этой задачи.

Найдём с.з. и с.ф. методом разделения переменных.

Этап I. Рассмотрим специальную задачу вида

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, (x, y) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Будем искать нетривиальные решения этой задачи в виде $u = X(x)Y(y)$. Подстановка даёт

$$\begin{cases} -X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y), 0 < x, y < \pi, \\ X(0)Y(y) \equiv 0, X(\pi)Y(y) \equiv 0. \end{cases}$$

$$1) \quad X(0)Y(y) \equiv 0, X(\pi)Y(y) \equiv 0 \Rightarrow X(0) = 0, X(\pi) = 0;$$

2) Разделяем переменные в уравнении

$$-X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y):$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)}. \text{ Так как } x, y \text{ — независимые переменные,}$$

то последнее уравнение имеет решение только в том случае,

если

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = \mu \text{ — спектральный параметр}$$

задачи Штурма—Лиувилля, имеющей вид

$$\begin{cases} -X'' = \mu X, 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, X(\pi) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Решение задачи (14): $\mu_k = k^2$, $\omega_k = \sqrt{\mu_k} = k$,

$$X_k(x) = \sin \omega_k x = \sin kx, k \in \mathbb{N}.$$

Этап II. Пусть u есть с.ф. спектральной задачи (10), соответствующая некоторому с.з. λ . Она допускает

разложение в ряд Фурье $u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(x)$, где

коэффициенты $Y_k = Y_k(y)$ неизвестны. Подстановка ряда для с.ф. в задачу (10) даёт

$$\begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} Y_k''(y)X_k(x) + Y_k(y)X_k''(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(x), (x, y) \in \Omega, \\ \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(0) = 0, \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(\pi) = 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} Y_k'(0)X_k(x) = 0, \sum_{k=1}^{\infty} Y_k'(\pi)X_k(x) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(0) = 0, \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)X_k(\pi) = 0$

выполнены автоматически. Имеем краевые условия для $Y_k = Y_k(y)$: $Y'_k(0) = 0, Y'_k(\pi) = 0$. Из уравнения получается, что

$-\sum_{k=1}^{\infty} (Y''_k(y) - \omega_k^2 Y_k(y) + \lambda Y_k(y)) X_k(x) = 0$. Отсюда имеем

уравнение для $Y_k = Y_k(y)$: $Y''_k(y) - \omega_k^2 Y_k(y) + \lambda Y_k(y) = 0$. Пусть $\nu = \lambda - \mu_k = \lambda - \omega_k^2$, тогда задача Штурма—Лиувилля для $Y_k = Y_k(y)$ будет иметь вид

$$\begin{cases} -Y''_k = \nu Y_k, 0 < y < \pi, \\ Y'_k(0) = 0, Y'_k(\pi) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение задачи (15): $\nu_m = m^2, \sigma_m = \sqrt{\nu_m} = m$,

$Y_{mk}(y) = C_{mk} \cos \sigma_m y, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0, C_{mk} \neq 0$.

Но тогда $\lambda_{km} = \mu_k + \nu_m = k^2 + m^2, k = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$; а с.ф., отвечающие с.з. $\lambda_{km} = k^2 + m^2$, имеют вид

$$u(x, y) = \sum_{k, m: k^2 + m^2 = \lambda_{km}} C_{mk} \sin(kx) \cos(my),$$

другими словами, (ортогональный) базис соответствующего собственного подпространства состоит из функций

$\{\sin(kx) \cos(my) : (k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0, k^2 + m^2 = \lambda_{km}\}$. Кратность

с.з. λ (размерность собственного подпространства) равна

$\text{ord } \lambda = \#\{(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 : k^2 + m^2 = \lambda\}$. Примеры:

- $\lambda = 0$ — не с.з.;
- $\lambda = 1$ — с.з. кратности 1, $\{\sin x\}$ — с.ф.;
- $\lambda = 2$ — с.з. кратности 1, $\{\sin x \cos y\}$ — с.ф.;
- $\lambda = 3$ — не с.з.;
- $\lambda = 4$ — с.з. кратности 1, $\{\sin 2x\}$ — с.ф.;
- $\lambda = 5$ — с.з. кратности 2, $\{\sin x \cos 2y, \sin 2x \cos y\}$ — с.ф.;
- $\lambda = 6, \lambda = 7$ — не с.з.;
- $\lambda = 8$ — с.з. кратности 1, $\{\sin 2x \cos 2y\}$ — с.ф.;

- $\lambda = 9$ — с.з. кратности 1, $\{\sin 3x\}$ — с.ф.;
- $\lambda = 10$ — с.з. кратности 2, $\{\sin x \cos 3y, \sin 3x \cos y\}$ — с.ф.;
- ...
- $\lambda = 2023, \lambda = 2024$ — не с.з.;
- $\lambda = 2025 = 45^2 = 27^2 + 36^2$ — с.з. кратности 3,
 $\{\sin 45x, \sin 36x \cos 27y, \sin 27x \cos 36y\}$ — с.ф.

Определение. Комплексное число с целыми действительной и мнимой частями называются *гауссовым*:

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо гауссовых чисел.

С помощью гауссовых чисел можно решить задачу о представлении натурального числа в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Теорема 1. Простое число $p > 2$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$, и такое представление единственно (если не учитывать порядок слагаемых).

Например, $p = 61 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow p = 5^2 + 6^2$.

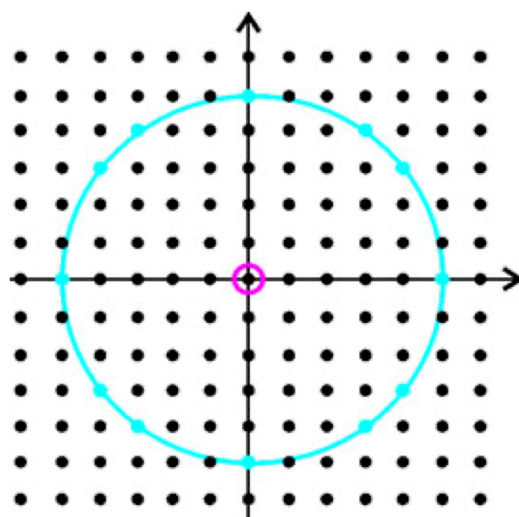
Теорема 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{N}$. Тогда

$$N(\lambda) = \#\{(m, k) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + k^2 = \lambda\} = 4(d_1(\lambda) - d_3(\lambda)),$$

где $d_1(\lambda)$ — число всех (натуральных) делителей числа λ , равных 1 по модулю 4, а $d_3(\lambda)$ — число всех (натуральных) делителей числа λ , равных 3 по модулю 4.

Другими словами, если $\lambda = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s}$ — факторизация числа λ , где $p_j \equiv 1 \pmod{4}, j = 1, \dots, r$,

$q_j \equiv 3 \pmod{4}, j = 1, \dots, s$, то $\#\{(m, k) \in \mathbb{Z} : m^2 + k^2 = \lambda\} =$
 $= N(\lambda) = \begin{cases} 4(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1), & \text{если все } \beta_1, \dots, \beta_s \text{ чётные,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$



Например, если $2025 = 5^2 \cdot 3^4$, то $N(2025) = 4 \cdot (2 + 1) = 12$.

Таким образом, $N(\lambda)$ всегда делится на 4 и $\text{ord } \lambda = \frac{1}{4}N(\lambda)$.

- А.Гончаров «Арифметика гауссовых чисел» («Квант» N12 за 1985 г.)
- В. Вавилов, А. Устинов, Окружности на решетках, Квант, 2006, номер 6, 10-14

Очень полезно изучать нули с.ф. спектральной задачи (10).

Определение. Узловой (нодальной) линией собственной функции $u = u(x, y)$ спектральной задачи (10) называется линия (семейство линий в области Ω) нулевого уровня этой функции:

$$N_u = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = 0\}.$$

Узловые линии с собственным значением $\lambda = 2025$ задаются уравнением

$F(x, y) = A \sin 45x + B \sin 36x \cos 27y + C \sin 27x \cos 36y = 0$,
 $|A| + |B| + |C| > 0$. Количество видов узловых линий и бифуркационных кривых в пространстве параметров оказывается очень большим. Некоторые примеры можно посмотреть на рисунках ниже.

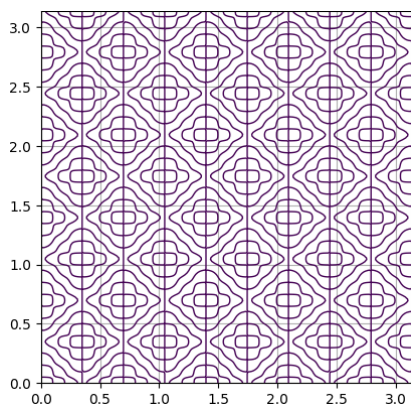


Рис. 1а

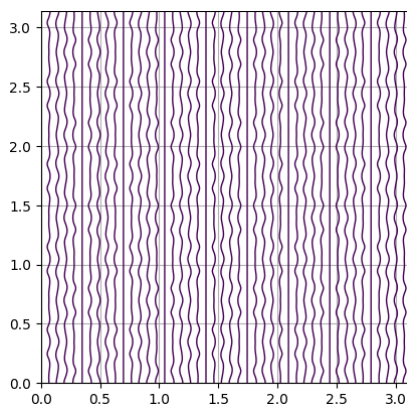


Рис. 1б

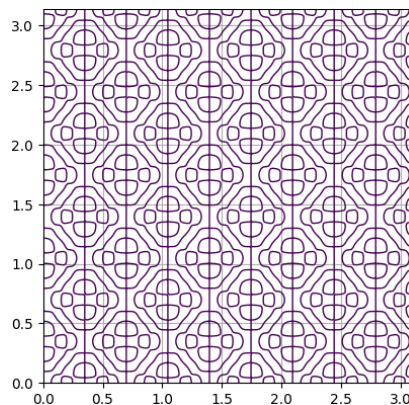


Рис. 1с

Рис. 1а: $0 \cdot \sin(45x) + 7 \sin(36x)\cos(27y) + 8 \sin(27x)\cos(36y) = 0$

Рис. 1б: $-8 \sin(45x) + 4 \sin(36x)\cos(27y) - 2 \sin(27x)\cos(36y) = 0$

Рис. 1с: $3 \sin(45x) + 10 \sin(36x)\cos(27y) - 7 \sin(27x)\cos(36y) = 0$

Можно отметить периодическую структуру и вертикальные линии.

Период функции $F = F(x, y)$ относительно y :

$$T_y = 2\pi \text{НОК} \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{36} \right) = 2\pi \text{НОК} \left(\frac{2^2}{2^2 \cdot 3^3}, \frac{3}{2^2 \cdot 3^3} \right) = \frac{2\pi}{9};$$

период функции $F = F(x, y)$ относительно x :

$$T_x = 2\pi \text{НОК} \left(\frac{1}{45}, \frac{1}{36}, \frac{1}{27} \right) = 2\pi \text{НОК} \left(\frac{2^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}, \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}, \frac{2^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} \right) =$$

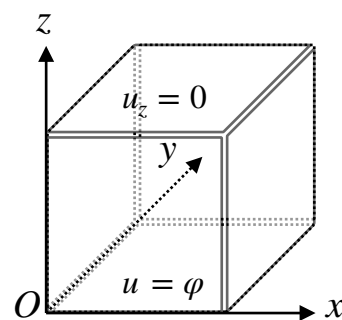
$$= 2\pi \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = \frac{2\pi}{9}.$$

Причина вертикальных линий: на отрезке $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{9}$ $\sin 45x$, $\sin 36x$ и $\sin 27x$ одновременно обращаются в нуль при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{9}$, $x = \frac{2\pi}{9}$.

- «Фигуры Хладни и квантовый хаос»: <https://habr.com/ru/post/406637>

Задача 1.3. Рассмотрим трёхмерную краевую задачу в кубе $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}$ вида

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y, z) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, \\ -u_y|_{y=0} = 0, u_y|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{z=0} = \varphi(x, y), u_z|_{z=\pi} = 0. \end{cases} \quad (16)$$



Цель: решить задачу (23) методом Фурье, получить интегральное представление решения.

Этап I. Рассмотрим специальную задачу вида

$$\begin{cases} \Delta U = 0, (x, y, z) \in \Omega, \\ U|_{x=0} = 0, U|_{x=\pi} = 0, \\ -U_y|_{y=0} = 0, U_y|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Найдём все нетривиальные решения данной задачи, имеющие вид $U(x, y, z) = V(x, y)Z(z)$, где V — неизвестная функция от

двух переменных, Z — неизвестная функция одной переменной. Подстановка даёт

$$\begin{cases} (V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y))Z(z) + V(x, y)Z''(z) = 0, (x, y, z) \in \Omega, \\ V|_{x=0} Z(z) \equiv 0, V|_{x=\pi} Z(z) \equiv 0, \\ -V_y|_{y=0} Z(z) \equiv 0, V_y|_{y=\pi} Z(z) \equiv 0. \end{cases}$$

Отметая случай $Z(z) \equiv 0$ как неинтересный, сразу имеем краевые условия для функции V :

$$V|_{x=0} = 0, V|_{x=\pi} = 0, -V_y|_{y=0} = 0, V_y|_{y=\pi} = 0.$$

Разделяем переменные в уравнении:

$$(V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y))Z(z) + V(x, y)Z''(z) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y)}{V(x, y)}. \text{ Так как } x, y, z \text{ — независимые}$$

переменные, то последнее уравнение имеет решение только в том случае, если

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} = \text{const} = \lambda,$$

где λ — спектральный параметр. Мы получили спектральную задачу вида (10)

$$\begin{cases} -V_{xx} - V_{yy} = \lambda V, 0 < x, y, < \pi, \\ V|_{x=0} = 0, V|_{x=\pi} = 0, \\ -V_y|_{y=0} = 0, V_y|_{y=\pi} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

уже решённую в примере 1.2. Результаты: $\lambda_{km} = k^2 + m^2$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $V_{km}(x, y) = \sin(kx)\cos(my)$.

Уравнение относительно $Z = Z(z)$ имеет вид

$$Z''_{km} - (k^2 + m^2) Z_{km} = 0.$$

При любых $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ его общее решение есть

$$Z_{km}(z) = A_{km} \operatorname{ch} \omega_{km} z + B_{km} \operatorname{sh} \omega_{km} z,$$

где $\omega_{km} = \sqrt{k^2 + m^2}$, A_{km}, B_{km} — постоянные интегрирования.

Этап II: разложение решения краевой задачи в ряд Фурье (в ряд по с.ф. спектральной задачи), нахождение коэффициентов разложения. Будем искать решение задачи (16) в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи (17) с коэффициентами, зависящими от z :

$$u(x, y, z) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} Z_{km}(z) V_{km}(x, y) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} Z_{km}(z) \sin(kx) \cos(my),$$

где коэффициенты $Z_{km} = Z_{km}(z)$ нужно найти. Перед подстановкой этого ряда разложим граничную функцию в ряд по с.ф. задачи (17):

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} \varphi_{km} V_{km}(x, y) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} \varphi_{km} \sin(kx) \cos(my),$$

где коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$\varphi_{km} = \frac{4}{\pi^2} \iint_{(0, \pi)^2} \varphi(s, t) \sin(ks) \cos(mt) ds dt. \quad (18)$$

Подстановка разложения граничной функции и ряда Фурье для решения в задачу (16) даёт

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z''_{nm}(z) V_{nm}(x, y) + Z_{nm}(z) \Delta_{x,y} V_{nm}(x, y) = 0, (x, y, z) \in \Omega, \\ \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z_{nm}(z) V_{nm}(0, y) = 0, \quad \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z_{nm}(z) V_{nm}(\pi, y) = 0, \\ \sum_{n=1, m=0}^{\infty} -Z_{nm}(z) \frac{\partial V_{nm}}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z_{nm}(z) \frac{\partial V_{nm}}{\partial y}(x, \pi) = 0, \\ \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z_{nm}(0) V_{nm}(x, y) = \sum_{n=1, m=0}^{\infty} \varphi_{nm} V_{nm}(x, y), \quad \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z'_{nm}(\pi) V_{nm}(x, y) = 0. \end{array} \right.$$

Отметим, что краевые условия на боковых гранях куба (вторая и третья строчки) выполнены при любых $Z = Z_{km}(z)$, поскольку $V_{km} = V_{km}(x, y)$ — с.ф. спектральной задачи (17). Что следует из условий на верхней и нижней гранях?

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{k=1, m=0}^{\infty} Z_{km}(0) V_{km}(x, y) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} \varphi_{km} V_{km}(x, y) \Rightarrow \\
 & Z_{km}(0) = \varphi_{km}; \\
 & \cdot \sum_{k=1, m=0}^{\infty} Z'_{km}(\pi) V_{km}(x, y) = 0 \Rightarrow Z'_{km}(\pi) = 0; \\
 & \cdot \sum_{k=1, m=0}^{\infty} Z''_{km}(z) V_{km}(x, y) + Z_{km}(z) \Delta_{x,y} V_{km}(x, y) = 0 \Rightarrow \\
 & \sum_{k=1, m=0}^{\infty} (Z''_{km}(z) - \lambda_{km} Z_{km}(z)) V_{km}(x, y) = 0 \Rightarrow \\
 & Z''_{km} - (k^2 + m^2) Z_{km} = 0 \text{ для всех } (k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0.
 \end{aligned}$$

Имеем краевые задачки для коэффициентов Фурье $Z_{km} = Z_{km}(z)$:

$$\begin{cases} Z''_{km} - (k^2 + m^2) Z_{km} = 0, 0 < z < \pi, \\ Z_{km}(0) = \varphi_{km}, Z'_{km}(0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Единственное решение задачки (19) есть функция

$$Z_{km}(z) = \frac{\varphi_{km}}{\cosh \omega_{km} \pi} \cosh \omega_{km}(\pi - z), \omega_{km} = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

Ряд, представляющий решение краевой задачи (16), имеет вид

$$u(x, y, z) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} \frac{\varphi_{km}}{\cosh \omega_{km} \pi} \cosh(\omega_{km}(\pi - z)) \sin(kx) \cos(my).$$

Получим интегральную формулу для решения задачи (16).

Для этого в формулу выше подставим выражения (18) для коэффициентов Фурье граничной функции φ и сделаем

рокировку:

$$u(x, y, z) = \sum_{k=1, m=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh \omega_{km} \pi} \cosh(\omega_{km}(\pi - z)) \sin(kx) \cos(my) \cdot$$

$$\frac{4}{\pi^2} \iint_{(0, \pi)^2} \varphi(s, t) \sin(ks) \cos(mt) ds dt = \iint_{(0, \pi)^2} K(s, t, x, y, z) \varphi(s, t) ds dt,$$

где выражение для интегрального ядра даётся формулой

$$K(s, t, x, y, z) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1, m=0}^{\infty} \frac{\sin(ks) \cos(mt)}{\cosh \omega_{km} \pi} \sin(kx) \cos(my) \cosh(\omega_{km}(\pi - z)),$$

$$\omega_{km} = \sqrt{k^2 + m^2}.$$