

Уравнения в частных производных

Эллиптические операторы второго порядка: часть 1

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

~~<https://newbaikov.ru/pde>~~

<https://baikov.org/pde>

- 1 Постановка задач. Сильные решения
- 2 Определение обобщённых решений краевых задач
- 3 Корректность позитивных задач
- 4 Фредгольмова разрешимость краевых задач для равномерно эллиптических уравнений второго порядка

Равномерно эллиптические операторы второго порядка

Дивергентный эллиптический оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x)\nabla u) + c(x)u. \quad (1)$$

Предполагается, что $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall x \in \overline{\Omega}$
 $A(x) \geq A^0 > 0$ (условие равномерной эллиптичности), $c \in C(\overline{\Omega})$. Наряду с оператором (1) будем рассматривать эллиптический оператор в дивергентной форме вида

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div} (A(x)\nabla u) + \operatorname{div} (\vec{b}(x)u) + c(x)u, \quad (2)$$

где A , c такие же, как и для оператора (1), $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $b_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, \dots, n$. Формально сопряжённый оператор имеет вид

$\mathcal{L}^*v = -\operatorname{div} (A(x)\nabla v) - \vec{b}(x) \cdot \nabla v + c(x)v =$
 $-\operatorname{div} (A(x)\nabla v) - \operatorname{div} (\vec{b}(x)u) + (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x))u$. Коэффициенты операторов (1) и (2) принимают вещественные значения. Поставим три стандартные внутренние краевые задачи для уравнения с оператором (2), в частности, оператором (1).

Постановка краевых задач

❶ **Задача Дирихле** ($\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \quad (3)$$

❷ **Задача Неймана** ($\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \Leftrightarrow \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_k(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

❸ **Третья краевая задача (задача Робена)** ($\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева второго порядка в области Ω . Под $X \oplus Y$ будем понимать прямую сумму гильбертовых пространств X и Y :

$$X \oplus Y = \{(x, y) = x \oplus y : x \in X, y \in Y\},$$
$$(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2)_{X \oplus Y} = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y.$$

Обозначим граничный оператор краевой задачи через $\mathcal{B}$, а саму краевую задачу — через $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$. Рассмотрим оператор $L : H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \oplus H^s(\partial\Omega)$, действующий на функции из $H^2(\Omega)$ следующим образом: $u \mapsto \mathcal{L}u \oplus \mathcal{B}u$. Если $\mathcal{B}$ — оператор следа (задача Дирихле), то по теореме о следах $s = \frac{3}{2}$. Для третьей краевой задачи (и задачи Неймана) имеем $s = \frac{1}{2}$.

Определение 2.1

Сильным решением краевой задачи $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$ с правыми частями $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^s(\partial\Omega)$ будем называть такую функцию $u \in H^2(\Omega)$, что $Lu = f \oplus \varphi$.

- 1 Постановка задач. Сильные решения
- 2 Определение обобщённых решений краевых задач
- 3 Корректность позитивных задач
- 4 Фредгольмова разрешимость краевых задач для равномерно эллиптических уравнений второго порядка

Формула интегрирования по частям

Основным инструментом исследования краевых задач, как и прежде, служит формула интегрирования по частям — теперь для функций из пространства Соболева.

Теорема 2.1

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u, v \in H^1(\Omega)$, $\vec{\nu}$ — поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \nu_i \, ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx. \quad (6)$$

Действительно, по теореме о плотности (пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $H^1(\Omega)$, если $\partial\Omega \in C^1$) существуют последовательности $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$, сходящиеся в $H^1(\Omega)$ к u , v , соответственно. Но тогда, очевидно, можно сделать предельный переход в классической формуле интегрирования по частям и получить формулу (6).

Определение обобщённых решений: дивергентные операторы

Из формулы интегрирования по частям следуют первая формула Грина для оператора Лапласа и оператора (1) в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$:
 $\forall u, v \in H^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L}u \, dx = - \int_{\partial\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu}) v \, ds + \int_{\Omega} A(x) \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} c(x) uv \, dx.$$

Пусть $u \in H^2(\Omega)$ — сильное решение краевой задачи $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$, $v \in H^1(\Omega)$ — пока произвольная функция. Имеем $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$. Преобразуем левую часть этого равенства с помощью первой формулы Грина для оператора (1):

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} &\equiv \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x) uv) \, dx - \\ &- \int_{\partial\Omega} A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} |_{\partial\Omega} v |_{\partial\Omega} \, ds = \int_{\Omega} f(x) v \, dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Определение обобщённого решения задачи Дирихле для дивергентного уравнения

Для удобства введём обозначение $a_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x) uv) \, dx$. Пусть $v|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда интегральное равенство (7) примет вид

$$a_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} f(x) v \, dx. \quad (8)$$

Определение 2.2

Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Дирихле (3), если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (8).

Очевидно, сильное решение задачи Дирихле является также и обобщённым. Оказывается, при некоторых дополнительных условиях верно и обратное.

Определение обобщённого решения задачи Робена для дивергентного уравнения

Из краевого условия задачи Робена (5) следует, что $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} = \varphi(x) - \sigma(x) u|_{\partial\Omega}$. Подставим в формулу (7) выражение для $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega}$ и перепишем интегральное равенство следующим образом:

$$a_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} ds = \int_{\Omega} f(x) v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v|_{\partial\Omega} ds. \quad (9)$$

Определение 2.3

Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Робена (5) (в частности, задачи Неймана (4)), если для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (9).

Определение обобщённых решений: равномерно эллиптические операторы второго порядка

Приступаем к определению обобщённых решений краевых задач (3), (4) и (5) для общего равномерно эллиптического оператора второго порядка (2). Пусть $u \in H^2(\Omega)$ — сильное решение краевой задачи $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$, $v \in H^1(\Omega)$. Умножим уравнение на пробную функцию v и проинтегрируем по области Ω : $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$. Левую часть этого равенства преобразуем, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} \equiv & \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx - \int_{\Omega} u(\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} uv\vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} \Big|_{\partial\Omega} ds - \int_{\partial\Omega} A(x) \nabla u \cdot \vec{\nu} \Big|_{\partial\Omega} v \Big|_{\partial\Omega} ds = \int_{\Omega} f(x) v dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Снова введём обозначение: $a_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv) dx$. Билинейная симметрическая форма $a_{\mathcal{L}}$ соответствует дивергентной (формально самосопряжённой) части оператора (2):
$$\frac{1}{2} (\mathcal{L} + \mathcal{L}^*) u = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u) + c(x)u.$$

Определение обобщённого решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

Пусть $v|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда интегральное равенство (10) примет вид

$$a_{\mathcal{L}}(u, v) - \int_{\Omega} u(\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} f(x) v dx. \quad (11)$$

Определение 2.4

Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Дирихле (3) для общего равномерно эллиптического оператора (2), если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (11).

Замечание. При определении сильного решения задачи Дирихле (3) для оператора (2) необходимо считать, что $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $b_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $j = 1, \dots, n$, однако, как явствует из (11), определение 2.4 (и определение 2.5 — см. след. слайд) работает и для непрерывных коэффициентов из $C(\bar{\Omega})$.

Определение обобщённого решения задачи Робена для эллиптического уравнения второго порядка

Из краевого условия Робена следует, что $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} = \varphi(x) - \sigma(x) u|_{\partial\Omega}$. Подставим в интегральное равенство (10) выражение для $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega}$ и перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \left(\sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} \right) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} ds - \int_{\Omega} u(\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = \\ = \int_{\Omega} f(x) v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v|_{\partial\Omega} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Определение 2.5

Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Робена (5) (в частности, задачи Неймана (4)) для общего равномерно эллиптического оператора (2), если для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (12).

- 1 Постановка задач. Сильные решения
- 2 Определение обобщённых решений краевых задач
- 3 Корректность позитивных задач
- 4 Фредгольмова разрешимость краевых задач для равномерно эллиптических уравнений второго порядка

Корректность позитивной задачи Дирихле

Исследуем существование и единственность обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения с дивергентным равномерно эллиптическим оператором (1). Задачу (3) для оператора (1) будем называть *позитивной*, если $c(x) \geq 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$.

Теорема 2.2

Пусть в дивергентном эллиптическом операторе $c(x) \geq 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от области Ω и оператора задачи $\mathcal{L}$, что для каждого $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение задачи Дирихле (3) и верна оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \quad (13)$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $H_0^1(\Omega)$. По теореме об эквивалентной норме скалярное произведение $(u, v)' = a_{\mathcal{L}}(u, v)$ порождает норму в $H_0^1(\Omega)$, эквивалентную стандартной. Обозначим $\|u\|'_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)'}$.

Корректность позитивной задачи Дирихле

Шаг 1. Так как $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, то по теореме о поднятии существует функция $w \in H^1(\Omega)$, такая, что $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ и $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, где константа C_1 не зависит от φ (оператор поднятия — сечение оператора следа, представляющий собой линейный ограниченный оператор).

Шаг 2. Применим редукцию. Легко видеть, что функция $u \in H^1(\Omega)$ — обобщённое решение задачи Дирихле (3) тогда и только тогда, когда $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и для любой $v \in H_0^1(\Omega)$ $(u_0, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)'$, т.е. u_0 удовлетворяет (в смысле обобщённых решений) *виртуальной* задаче Дирихле с однородным краевым условием.

Шаг 3. Функционал $v \mapsto \langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)'$ принадлежит $H_0^1(\Omega)^*$ (сопряжённому пространству, т.е. пространству линейных ограниченных функционалов), поскольку $|\langle l, v \rangle| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|'_{H^1(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\beta \|f\|_{L_2(\Omega)} + \alpha C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \|v\|'_{H_0^1(\Omega)}$. Двойственную к $\|\cdot\|'_{H_0^1(\Omega)}$ норму обозначим через $\|\cdot\|'$.

Корректность позитивной задачи Дирихле

Замечание. Константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$.

По теореме Рисса существует единственная функция $U_0 \in H_0^1(\Omega)$: $\forall v \in H_0^1(\Omega) (U_0, v)' = \langle l, v \rangle$ и $\|U_0\|'_{H_0^1(\Omega)} = \|l\|'$.

Шаг 4. Очевидно, что $u_0 = U_0$ и $\|u_0\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta\|f\|_{L_2(\Omega)} + \alpha C_1\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$.

Получим оценку (13). Имеем

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \beta \left(\beta\|f\|_{L_2(\Omega)} + \alpha C_1\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \leq \beta^2\|f\|_{L_2(\Omega)} + C_1(1 + \alpha\beta)\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Тогда можно положить $C = \max\{\beta^2, C_1(1 + \alpha\beta)\}$. Теорема 2.2 доказана.

Корректность позитивной задачи Робена

Задачу (5) для оператора (1) будем называть *позитивной*, если $c(x) \geq 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$, $\sigma(x) \geq 0$ при $x \in \partial\Omega$, $c \neq 0$ или $\sigma \neq 0$.

Теорема 2.3

Пусть в дивергентном эллиптическом операторе $c(x) \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$, а в краевом условии $\sigma(x) \geq 0$, $x \in \partial\Omega$; при этом $c \neq 0$ или $\sigma \neq 0$. Тогда для любых $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение третьей краевой задачи (5) и верная оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) \quad (14)$$

с независимой от f и φ константой C .

Доказательство. В пространстве $H^1(\Omega)$ скалярное произведение $(u, v)'_{H^1(\Omega)} = a_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} ds$ порождает норму, эквивалентную стандартной (по теореме об эквивалентной норме). Обозначим $\|u\|'_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)'}$.

Шаг 1. Функционал $v \mapsto \langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v \, ds \in H^1(\Omega)^*$, т.к.

$$|\langle l, v \rangle| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \beta \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)} + \beta \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)} \leq \beta (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) \|v\|'_{H^1(\Omega)}, \text{ где} \\ T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega) \text{ — оператор следа, } \|T\| \text{ — его норма.}$$

Замечание. Константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|'_{H^1(\Omega)} \leq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$ для любой $v \in H^1(\Omega)$.

По теореме Рисса существует единственная функция $U \in H^1(\Omega)$ с тем свойством, что $\forall v \in H^1(\Omega) \ (U, v)'_{H^1(\Omega)} = \langle l, v \rangle$ и $\|U\|'_{H^1(\Omega)} = \|l\|'$.

Шаг 2. Очевидно, что U есть обобщённое решение задачи Робена (5).

Получим оценку (14):

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta \|u\|'_{H^1(\Omega)} \leq \beta^2 (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}). \text{ Положим} \\ C = \beta^2 \max\{1, \|T\|\}. \text{ Теорема 2.3 доказана.}$$

- 1 Постановка задач. Сильные решения
- 2 Определение обобщённых решений краевых задач
- 3 Корректность позитивных задач
- 4 Фредгольмова разрешимость краевых задач для равномерно эллиптических уравнений второго порядка

Фредгольмова разрешимость

Задача Дирихле (3) для уравнения с общим эллиптическим оператором (2), если $\vec{b} \neq 0$ или функция s принимает отрицательные значения, может не иметь решений или иметь бесконечно много решений, т.е. быть некорректной. Приемлемое расширение понятия корректности — *фредгольмова разрешимость*.

С неформальной точки зрения фредгольмова разрешимость есть однозначная разрешимость с точностью до конечномерных подпространств. Пусть $A : H \rightarrow H$ — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = F. \quad (15)$$

Оператор A *фредгольмов*, если $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ и $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$, где $\operatorname{Coker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp$ — коядро оператора. *Индексом* фредгольмова оператора называется число $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$. Условие на ядро означает, что однородное уравнение $Au = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений.

Фредгольмова разрешимость

Из условия на коядро следует, что уравнение (15) разрешимо, если и только если правая часть удовлетворяет конечному числу условий вида $F \perp v_j$, где $\text{Coker } A = \text{Lin}(v_1, \dots, v_d)$, $j = 1, \dots, d = \dim \text{Coker } A$. Коядро оператора A совпадает с ядром сопряженного оператора: $\text{Coker } A = \text{Ker } A^*$. Таким образом, уравнение (15) разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения уравнения $A^*v = 0$ $(F, v)_H = 0$.

Теорема Фредгольма

Пусть H — гильбертово пространство, $K : H \rightarrow H$ — компактный оператор, $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda I + K$ — фредгольмов оператор с нулевым индексом.

Проблема в том, что определения 2.4 и 2.5 не сформулированы в терминах операторных уравнений. Поэтому, во-первых, следует свести краевые задачи (3), (4) и (5) к эквивалентным (в смысле обобщённых решений) операторным уравнениям.

Задача Дирихле

Начнём с задачи Дирихле. В пространстве $H_0^1(\Omega)$ введём эквивалентную норму, порождённую скалярным произведением

$$(u, v)' = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u v dx,$$

где $m = \max \{ -\min_{x \in \overline{\Omega}} c(x), 0 \}$. Возьмём функцию $w \in H^1(\Omega)$ такую, что $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ (напомню, что поднятие возможно, если $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$).

Сделаем подстановку $u = w + u_0$ в интегральное тождество (11), где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, и перепишем его в виде

$$(u_0, v)' + \langle l_1(u_0), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle. \quad (16)$$

Здесь $\langle l_1(u_0), v \rangle = -m \int_{\Omega} u_0 v dx - \int_{\Omega} u_0 \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx$ (для $\langle l_1(w), v \rangle$ выражение аналогичное).

Лемма о компактном операторе K

Лемма 2.1

Существует единственный компактный оператор $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, такой, что для всех $u_0, v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l_1(u_0), v \rangle = (Ku_0, v)'_{H_0^1(\Omega)}$.

Доказательство. Проверим, что $l_1(u_0) \in H_0^1(\Omega)^*$. Имеем

$$\begin{aligned} |\langle l_1(u_0), v \rangle| &\leq m \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq m \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \beta \left(m + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \right) \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u_0 \in H_0^1(\Omega)$, что $\langle l_1(u_0), v \rangle = (\tilde{K}u_0, v)'_{H_0^1(\Omega)}$ и $\|\tilde{K}u_0\|'_{H_0^1(\Omega)} = \|l_1\| \leq \beta(m + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})}) \|u_0\|_{L_2(\Omega)}$.

Замечание. Константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$.

Доказательство леммы о компактном операторе K

Данная конструкция даёт ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u_0 \mapsto \tilde{K}u_0 \in H_0^1(\Omega)$: $\|\tilde{K}\| \leq \beta(m + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})})$. Оператор $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ есть композиция компактного оператора вложения $j : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ и оператора $\tilde{K}$:

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & & \\ \downarrow j & \searrow K & \\ L_2(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{K}} & H_0^1(\Omega) \end{array}$$

Хорошо известно, что композиция компактного оператора и ограниченного оператора (в любом порядке) есть компактный оператор. Единственность: если существует другой оператор $K' : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий выводу леммы, то $\exists u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $(Ku_0 - K'u_0, v)'_{H_0^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow Ku_0 - K'u_0 = 0$. Лемма 2.1 доказана.

Операторное уравнение для задачи Дирихле

Перепишем, пользуясь леммой 2.1, интегральное тождество (16) в виде

$$((I + K)u_0, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle. \quad (17)$$

Далее, функционал $H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle$ принадлежит $H_0^1(\Omega)^*$, потому что

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|'_{H^1(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \\ &+ \beta \left(m + \|\vec{b}\|_{C(\bar{\Omega})} \right) \|w\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \\ &+ \alpha C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \beta C_1 \left(m + \|\vec{b}\|_{C(\bar{\Omega})} \right) \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \left(\beta \|f\|_{L_2(\Omega)} + \left(\alpha + \beta \left(m + \|\vec{b}\|_{C(\bar{\Omega})} \right) \right) C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \|v\|'_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H_0^1(\Omega)$ и для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$. Отсюда для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ $((I + K)u_0 - F, v)' = 0$, и мы получили операторное уравнение для обобщённых решений задачи Дирихле (3):

$$(I + K)u_0 = F. \quad (18)$$

Ядро оператора $I + K$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов, его индекс равен нулю.

- Ядро оператора $I + K$ суть пространство обобщённых решений задачи Дирихле (3), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно, $(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega) ((I + K)u, v)' = 0$. Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_1(u), v \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u v dx - m \int_{\Omega} u v dx - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0$$

$\Leftrightarrow a_{\mathcal{L}}(u, v) - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0$, что совпадает с определением 2.4. Из фредгольмовости следует, что $\dim \text{Ker}(I + K) = d < \infty$. Пусть $u_1, \dots, u_d \in H_0^1(\Omega)$ — базис ядра оператора $I + K$.

- Коядро оператора $I + K$ также конечномерно, его размерность равна d ; выясним, из каких функций состоит $\text{Coker}(I + K)$. Имеем $\text{Coker}(I + K) = \text{Ker}(I + K^*)$, где K^* — сопряжённый оператор. Функция $u^* \in \text{Ker}(I + K^*) \Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega) ((I + K^*)u^*, v)' = 0$.

Коядро оператора $I + K$

Последнее тождество может быть переписано в виде

$$(u^*, v)' + (u^*, Kv)' = 0 \Leftrightarrow (u^*, v)' + \langle l_1(v), u^* \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u^* v dx - m \int_{\Omega} v u^* dx - \int_{\Omega} v \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx = 0.$$

Интегрирование по частям даёт $-\int_{\Omega} v \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} (\vec{b}(x) v) dx = \int_{\Omega} u^* (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{b}(x) u^* v dx \Rightarrow \\ &\int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)) v u^* dx + \int_{\Omega} u^* (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = 0. \end{aligned}$$

Вспомним формулу для формально сопряжённого оператора:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* u^* &= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u^*) - \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* + c(x) u^* = \\ &= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u^*) - \operatorname{div} (\vec{b}(x) u^*) + (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)) u^*. \end{aligned}$$

Кроме того,

$a_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v + (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)) u^* v) dx$, а последнее интегральное тождество можно переписать в виде

$$a_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) + \int_{\Omega} u^* (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = 0.$$

Условия разрешимости задачи Дирихле

Тогда, в силу произвольности пробной функции v , функция u^* есть обобщённое решение задачи Дирихле для формально сопряжённого оператора, имеющей вид

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* u^* = 0 \text{ в } \Omega, \\ u^*|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Задачу (19) называют *сопряжённой* к задаче (3). Пусть $u_1^*, \dots, u_d^* \in H_0^1(\Omega)$ — базис $\text{Coker}(I + K)$, образующий максимальную линейно независимую систему обобщённых решений задачи (19). Получим критерий существования обобщённого решения задачи Дирихле (3) для общего равномерно эллиптического оператора второго порядка. Неявный вариант критерия: $F \perp u_j^*$, $j = 1, \dots, d$, где F — правая часть операторного уравнения (18). Чтобы получить явный вариант критерия разрешимости вспомним, как мы получили функцию $F \in H_0^1(\Omega)$: для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$. Отсюда $(F, u_j^*)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow (f, u_j^*)_{L_2(\Omega)} - (w, u_j^*)' - \langle l_1(w), u_j^* \rangle = 0$.

Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле

В интегральном виде: $\int_{\Omega} f(x)u_j^* dx - \int_{\Omega} A(x)\nabla w \cdot \nabla u_j^* dx -$
 $\int_{\Omega} (c(x) + m)wu_j^* dx + m \int_{\Omega} wu_j^* dx + \int_{\Omega} w\vec{b}(x) \cdot \nabla u_j^* dx = 0$ или

$\int_{\Omega} f(x)u_j^* dx - \left(\int_{\Omega} A(x)\nabla u_j^* \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} c(x)u_j^* u dx - \int_{\Omega} w\vec{b}(x) \cdot \nabla u_j^* dx \right) = 0$. Но выражение в больших скобках равно нулю, поскольку u_j^* — обобщённое решение задачи (19) $\Rightarrow \int_{\Omega} f(x)u_j^* dx = 0$. Подведём итоги рассуждений в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$).

Теорема 2.4

Внутренняя задача Дирихле (3) для общего равномерно эллиптического оператора (2) разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи имеет конечную размерность d ; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда для каждого обобщённого решения $u^* \in H_0^1(\Omega)$ задачи (19) $(f, u^*)_{L_2(\Omega)} = 0$; 3) пространство обобщённых решений задачи (19) также имеет размерность d .

Задача Робена

Работаем с задачей Робена (5). В пространстве $H^1(\Omega)$ рассмотрим билинейную симметрическую форму

$$(u, v)' = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) uv dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) + \mu) uv ds, \quad (20)$$

где $m = \max \{-\min_{x \in \overline{\Omega}} c(x), 0\}$, $\mu = \max \{-\min_{x \in \partial\Omega} \tau(x), 0\}$, $\tau(x) = \sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}$. Мы предполагаем, что $c \neq 0$ или $\tau \neq 0$, поэтому форма (20) есть скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной. Случай $c \equiv 0$, $\tau \equiv 0$ будет исследован отдельно. Перепишем интегральное тождество (12) в виде

$$(u, v)' + \langle l_3(u), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (Tv, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (21)$$

Здесь $\langle l_3(u), v \rangle = -m \int_{\Omega} uv dx - \mu \int_{\partial\Omega} uv ds - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx$,

$T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ — оператор следа.

Лемма о компактном операторе K

Лемма 2.2

Существует единственный компактный оператор $K : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, такой, что для всех $u, v \in H^1(\Omega)$ $\langle l_3(u), v \rangle = (Ku, v)'_{H^1(\Omega)}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функционал вида $\langle \tilde{l}_3(u), v \rangle = -m \int_{\Omega} u_0 v dx - \int_{\Omega} u \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx$. Убедимся в том, что $\tilde{l}_3(u) \in H^1(\Omega)^*$:

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{l}_3(u), v \rangle| &\leq m \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq m \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \beta \left(m + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \right) \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u \in H^1(\Omega)$, что $\langle \tilde{l}_3(u), v \rangle = (\tilde{K}u, v)'_{H^1(\Omega)}$ и $\|\tilde{K}u\|'_{H^1(\Omega)} = \|\tilde{l}_3\| \leq \beta \left(m + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})} \right) \|u\|_{L_2(\Omega)}$.

Здесь рассуждения аналогичны тем, что были при доказательство леммы 2.1.

Доказательство леммы о компактном операторе K

Замечание. Константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|'_{H^1(\Omega)} \leq \alpha\|v\|_{H^1(\Omega)}$ для любой $v \in H^1(\Omega)$.

Данная конструкция определяет ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$: $\|\tilde{K}\| \leq \beta(m + \|\vec{b}\|_{C(\overline{\Omega})})$. Из теоремы о компактности следует, что оператор вложения $j : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ компактен.

Осталось разобраться с членом $-\mu \int_{\partial\Omega} uvds$, входящим в определение функционала l_3 . Обозначим след на $\partial\Omega$ функции $u \in H^1(\Omega)$ через ψ , запишем оценку: $\left| -\mu \int_{\partial\Omega} uvds \right| \leq \mu \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \mu \|T\| \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \mu \beta \|T\| \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)}$. По теореме Рисса существует функция $S\psi \in H^1(\Omega)$, что $\forall v \in H^1(\Omega)$ справедливо представление $-\mu \int_{\partial\Omega} uvds = (S\psi, v)'_{H^1(\Omega)}$. Отметим, что функция $S\psi$ совершенно не должна совпадать с функцией v , но порождается ей с помощью композиции операторов $H^1(\Omega) \xrightarrow{T} L_2(\partial\Omega) \xrightarrow{S} H^1(\Omega)$.

Операторное уравнение для задачи Робена

Положим $K = \tilde{K}j + ST$, тогда для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ будем иметь

$$(Ku, v)'_{H^1(\Omega)} = (\tilde{K}u, v)'_{H^1(\Omega)} + (S\psi, v)'_{H^1(\Omega)} = \langle l_3(u), v \rangle.$$

Компактность построенного оператора K следует из компактности оператора следа. Лемма 2.2 доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 2.2, интегральное тождество (21) в виде

$$((I + K)u, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (Tv, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (22)$$

Оценим функционал $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (Tv, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)}$:

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq \beta (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) \|v\|'_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H^1(\Omega)$, что для всех $v \in H^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$. Следовательно, для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u - F, v)' = 0$, и операторное уравнение для обобщённых решений задачи Робена (5) имеет вид

$$(I + K)u = F. \quad (23)$$

Ядро оператора $I + K$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов.

- Ядро оператора $I + K$ состоит из обобщённых решений задачи Робена (5), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно, $(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega) ((I + K)u, v)' = 0$. Преобразуем последнее равенство:

$$(u, v)' + \langle l_3(u), v \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u v dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) + \mu) u v ds - m \int_{\Omega} u v dx - \mu \int_{\partial\Omega} u v ds - \int_{\Omega} \vec{u} \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_{\mathcal{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \tau(x) u v ds - \int_{\Omega} \vec{u} \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0, \text{ что совпадает с}$$

определением 2.5. Фредгольмовость означает, что

$\dim \text{Ker}(I + K) = d < \infty$. Пусть $u_1, \dots, u_d \in H^1(\Omega)$ — базис ядра оператора $I + K$.

- Коядро оператора $I + K$ также конечномерно, его размерность равна d , потому что $\text{ind}(I + K) = 0$. Имеем $\text{Coker}(I + K) = \text{Ker}(I + K^*)$, где K^* — сопряжённый оператор. Функция $u^* \in \text{Ker}(I + K^*) \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega) ((I + K^*) u^*, v)' = 0$.

Коядро оператора $I + K$

Последнее тождество может быть переписано в виде
 $(u^*, v)' + (u^*, Kv)' = 0 \Leftrightarrow (u^*, v)' + \langle l_3(v), u^* \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + m) u^* v dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) + \mu) u^* v ds - \\ - m \int_{\Omega} v u^* dx - \mu \int_{\partial\Omega} v u^* ds - \int_{\Omega} \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx = 0.$$

Применяем формулу интегрирования по частям: $-\int_{\Omega} \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx =$
 $= -\int_{\partial\Omega} u^* \vec{b} \cdot \vec{\nu} ds + \int_{\Omega} u^* \operatorname{div} (\vec{b}(x)v) dx =$
 $= -\int_{\partial\Omega} u^* \vec{b} \cdot \vec{\nu} ds + \int_{\Omega} u^* (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{b}(x) u^* v dx.$ Отсюда
 $\int_{\Omega} A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)) u^* v dx + \int_{\partial\Omega} (\tau(x) - \vec{b} \cdot \vec{\nu}) u^* v ds +$
 $\int_{\Omega} u^* (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = 0.$ Поскольку формально сопряжённый оператор
имеет вид $\mathcal{L}^* u^* = -\operatorname{div} (A(x) \nabla u^*) - \vec{b}(x) \cdot \nabla u^* + c(x) u^* =$
 $= -\operatorname{div} (A(x) \nabla u^*) - \operatorname{div} (\vec{b}(x) u^*) + (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x)) u^*,$

Сопряжённая задача

соответствующая ему форма есть

$$a_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) = \int_{\Omega} \left(A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v + \left(c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x) \right) u^* v \right) dx,$$

$\tau(x) - \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} = \sigma(x)$, интегральное равенство можно представить как

$$a_{\mathcal{L}^*}(u^*, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u^* v ds + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0.$$

Но в таком случае функция $u^* \in H^1(\Omega)$ есть обобщённое решение задачи Робена вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* u^* = 0 \text{ в } \Omega, \\ A(x) \nabla u^* \cdot \vec{\nu} + \left(\sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} \right) u^* \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Задачу (24) называют *сопряжённой* к задаче (5). Отметим, что в отличие от задачи (19) в задаче (24) не только формально сопрягается оператор $\mathcal{L}$, но и изменяется граничный оператор. Пусть $u_1^*, \dots, u_d^* \in H^1(\Omega)$ — базис $\operatorname{Coker}(I + K)$, образующий максимальную линейно независимую систему обобщённых решений задачи (24). Получим критерий существования обобщённого решения задачи Робена (5).

Фредгольмова разрешимость задачи Робена

Неявный критерий суть $F \perp u_j^*$, $j = 1, \dots, d$, где F — правая часть операторного уравнения (23). Имеем $(F, u_j^*)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow (f, u_j^*)_{L_2(\Omega)} + (Tu^*, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)} = 0$, т.е.

$$\int_{\Omega} f(x) u_j^* dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) u_j^*|_{\partial\Omega} ds = 0. \quad (25)$$

Подведём итоги исследования фредгольмовой разрешимости задачи Робена в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$).

Теорема 2.5

Внутренняя задача Робена (5) для общего равномерно эллиптического оператора (2) разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи имеет конечную размерность d ; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда для каждого обобщённого решения $u^* \in H^1(\Omega)$ сопряжённой задачи (24) выполнено условие разрешимости (25); 3) пространство обобщённых решений задачи (24) также имеет размерность d .

Задача Неймана для анизотропного уравнения Пуассона

Нам остался случай, когда $c(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $\tau(x) = \sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu} = 0$ для всех $x \in \partial\Omega$. Оставив полный разбор этого случая слушателям, рассмотрим задачу Неймана для анизотропного уравнения Пуассона вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \quad (26)$$

В частности, если $A(x) \equiv E$ (единичной матрице), то (26) есть задача Неймана для обычного уравнения Пуассона. Имеем $c = 0$, $\tau = 0$, поэтому теорема 2.5 не работает. В пространстве $H^1(\Omega)$ рассмотрим скалярное произведение $(u, v)' = \int_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx$, порождающее норму, эквивалентную стандартной. Перепишем интегральное равенство (9) из определения 2.3 следующим образом:

$$(u, v)' + \langle l_2(u), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (Tv, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)}, \quad (27)$$

Лемма о компактном операторе K

где $\langle l_2(u), v \rangle = - \int_{\Omega} uv dx$, $T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ — оператор следа.

Лемма 2.3

Существует единственный компактный оператор $K : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, такой, что для всех $u, v \in H^1(\Omega)$ $\langle l_2(u), v \rangle = (Ku, v)'_{H^1(\Omega)}$.

Доказательство леммы 2.3 вполне аналогично доказательству леммы 2.2. Оценка для функционала l_2 имеет вид

$$|\langle l_2(u), v \rangle| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u \in H^1(\Omega)$, что $\langle l_2(u), v \rangle = (\tilde{K}u, v)'_{H^1(\Omega)}$ и $\|\tilde{K}u\|'_{H^1(\Omega)} = \|l_2\| \leq \beta \|u\|_{L_2(\Omega)}$.

Замечание. Константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|'_{H^1(\Omega)} \leq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$ для любой $v \in H^1(\Omega)$.

Доказательство леммы о компактном операторе K

Данная конструкция даёт ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$: $\|\tilde{K}\| \leq \beta$. Из теоремы о компактности следует, что оператор вложения $j : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ компактен. Положим $K = \tilde{K}j$, тогда для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ будем иметь

$$(Ku, v)'_{H^1(\Omega)} = (\tilde{K}u, v)'_{H^1(\Omega)} = \langle l_2(u), v \rangle.$$

Компактность построенного оператора K следует из компактности оператора следа. Лемма 2.3 доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 2.3, интегральное равенство (27) в виде

$$((I + K)u, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (Tv, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (28)$$

Оценим функционал $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle l, v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (Tv, \varphi)_{L_2(\partial\Omega)}$:

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq \beta (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) \|v\|'_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H^1(\Omega)$, что для всех $v \in H^1(\Omega)$ $\langle l, v \rangle = (F, v)'$.

Операторное уравнение для задачи Неймана. Ядро оператора $I + K$

Следовательно, для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u - F, v)' = 0$, и операторное уравнение для обобщённых решений задачи Неймана (26) имеет вид

$$(I + K)u = F. \quad (29)$$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов. Ядро оператора $I + K$ состоит из обобщённых решений задачи Неймана (26), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно, $(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega) ((I + K)u, v)' = 0$.

Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_2(u), v \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx - \int_{\Omega} u v dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v dx = 0$.

Покажем, что $d = 1$ и $\text{Ker}(I + K) = \text{Lin}\{1\}$, т.е. ядро оператора $I + K$ состоит из констант. Действительно, если пробная функция $v = u \in \text{Ker}(I + K)$, то $0 = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla u dx \geq \int_{\Omega} \lambda_{\min}(A^\circ) |\nabla u|^2 dx$, где $\lambda_{\min}(A^\circ) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы A° . Поэтому $\nabla u = 0$ п.в. в $\Omega \Rightarrow u = \text{const}$ п.в. в Ω , что и требовалось.

Фредгольмова разрешимость задачи Неймана

Очевидно, что K из леммы 2.3 — самосопряжённый оператор, поэтому $\text{Coker}(I + K) = \text{Ker}(I + K^*) = \text{Ker}(I + K) = \text{Lin}\{1\}$. Неявный критерий существования решения задачи (26) $F \perp 1$, где F — правая часть операторного уравнения (29). Имеем $(F, 1)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow (f, 1)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, 1)_{L_2(\partial\Omega)} = 0$, т.е.

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) ds = 0. \quad (30)$$

Подведём итоги исследования фредгольмовой разрешимости задачи Неймана в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$).

Теорема 2.6

Внутренняя задача Неймана (26) для анизотропного уравнения Пуассона разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи состоит из констант; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (30).