

Уравнения в частных производных

Пространства Соболева: часть 1

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

~~<https://newbaikov.ru/pde>~~

<https://baikov.org/pde>

1 Пространства Лебега

2 Обобщённые производные

3 Принцип разбиения единицы

4 Пространства Соболева: определение, простые свойства, теорема о финитном продолжении и её следствия

Пространство квадратично интегрируемых функций

В этой теме и следующей мы изучаем гильбертову теорию краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка в ограниченных областях (внутренних краевых задач). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1

Пространство квадратично интегрируемых функций $L_2(\Omega)$ состоит из всех (классов) измеримых функций с конечным интегралом Лебега $\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$. Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ определяется формулой

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Из теории меры и интеграла Лебега известно, что $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство.

Плотность $C(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$

Теорема 1.1

Пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. 1) Из конструкции интеграла Лебега следует, что множество простых функций всюду плотно в $L_2(\Omega)$. Простая функция есть измеримая функция с конечным множеством значений.

2) Пусть $M \subset \overline{\Omega}$ — измеримое множество, χ_M — характеристическая функция множества M . Из теории меры известно, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F_M и открытое множество G_M , такие, что $F_M \subset M \subset G_M$ и $\text{mes}_n(G_M \setminus F_M) < \varepsilon$.

3) Рассмотрим *срезающую функцию*

$$\varphi(x) = \frac{\text{dist}(x, \Omega \setminus G_M)}{\text{dist}(x, F_M) + \text{dist}(x, \Omega \setminus G_M)}.$$

Плотность $C(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$

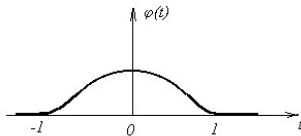
При $x \in F_M$ $\varphi(x) = 1$, при $x \in \Omega \setminus G_M$ $\varphi(x) = 0$. Поэтому $\varphi(x) - \chi_M(x) = 0$, если $x \in F_M \cup (\Omega \setminus G_M)$. Очевидно, что $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ и $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ при $x \in \overline{\Omega}$. Имеем

$$\|\chi_M - \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\chi_M(x) - \varphi(x)|^2 dx = \int_{G_M \setminus F_M} |\chi_M(x) - \varphi(x)|^2 dx \leq \text{mes}_n(G_M \setminus F_M) < \varepsilon.$$

4) Пусть $u \in L_2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Аппроксимируем функцию u простой функцией $\sum_{j=1}^N a_j \chi_{M_j}$ с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$, а каждую характеристическую функцию χ_{M_j} — непрерывной функций φ_j с точностью $\frac{\varepsilon}{2|a_j|N}$. Тогда $\left\| u - \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j \right\| = \left\| u - \sum_{j=1}^N a_j \chi_{M_j} + \sum_{j=1}^N a_j \chi_{M_j} - \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^N |a_j| \|\chi_{M_j} - \varphi_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^N |a_j| \frac{\varepsilon}{2|a_j|N} = \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\Omega)$. Теорема 1.1 доказана.

Техника усреднения

Функция $\varphi(t) = C_n \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)$ при $|t| < 1$, $\varphi(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, где $C_n > 0$ — некоторая постоянная (см. далее), получила название «шляпочка» благодаря виду своего графика:



Перечислим некоторые свойства функции φ :

- $\text{supp } \varphi = [-1, 1]$;
- $\varphi(-t) \equiv \varphi(t)$;
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) \geq 0$;
- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Техника усреднения

Константа C_n определяется из условия нормировки:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \omega_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} \varphi(r) dr = 1.$$

Определение 1.2

Ядром усреднения радиуса $h > 0$ называется функция $\zeta_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, определённая формулой $\zeta_h(x) = \frac{1}{h^n} \varphi\left(\frac{|x|}{h}\right)$.

Усреднению будем подвергать локально интегрируемые функции.

Определение 1.3

Пространство локально квадратично интегрируемых функций $L_{2,loc}(\Omega)$ состоит из таких (классов) измеримых функций, что для любой точки $x^0 \in \Omega$ и числа $\rho > 0$ при условии $B_\rho(x^0) \Subset \Omega$ $u|_{B_\rho(x^0)} \in L_2(B_\rho(x^0))$.

Лемма об усреднении

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $x^0 \in \Omega$ и $0 < h < \text{dist}(x^0, \partial\Omega)$. Положим

$$(J_h u)(x^0) = \int_{B_h(x^0)} \zeta_h(x^0 - y) u(y) dy = (\zeta_h * u)(x^0). \quad (1)$$

Оператор J_h называется *оператором усреднения* радиуса h . Его основная задача — сглаживание функций. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то $J_h : L_{2,loc}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (упражнение). Продолжим функцию $u \in L_2(\Omega)$ нулём вне Ω и рассмотрим оператор усреднения $J_h : L_{2,loc}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, действующий по формуле (1).

Лемма 1.1 (об усреднении)

Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Тогда $\|J_h u - u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$, т.е. квадратично интегрируемая функция может быть сколь угодно точно (в смысле L_2 -нормы) аппроксимирована своими средними.

Непрерывность в среднеквадратичном

Для доказательства леммы об усреднении нам потребуется одно свойство квадратично интегрируемых функций (аналог равномерной непрерывности функций из $C(\overline{\Omega})$).

Теорема 1.2

Функции из $L_2(\Omega)$ непрерывны в среднеквадратичном, т.е. для любой $u \in L_2(\Omega)$ $\|u(\cdot + z) - u(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$.

Замечание. Функции продолжаются нулем вне Ω .

Набросок доказательства. 1. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмём функцию $\tilde{u} \in C(\overline{B_{2a}})$, $\Omega \Subset B_a$: $\|u - \tilde{u}\|_{L_2(B_{2a})} < \frac{\varepsilon}{3}$ (существование такой функции следует из теоремы 1.1).

2. Рассмотрим срезающую функцию $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ со свойствами: $0 \leq \xi(x) \leq 1$, $\text{supp } \xi \subset \overline{B_a}$, $\xi(x) = 1$, $x \in \overline{\Omega}$ (упражнение: постройте её с помощью ядра усреднения и $\chi_{\overline{\Omega}}$). Положим $\varphi = \xi\tilde{u}$.

3. С помощью функции φ нетрудно показать, что $\|u(\cdot + z) - u(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$ (упражнение).

Доказательство леммы об усреднении

Рассмотрим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |(J_h u)(x) - u(x)|^2 &= \left(\int_{|x-y|<h} \zeta_h(x-y)(u(y) - u(x)) dy \right)^2 \leq \\ &\int_{|x-y|<h} \zeta_h(x-y)^2 dy \int_{|x-y|<h} |u(y) - u(x)|^2 dy \leq \\ &\frac{ch^n}{h^{2n}} \int_{|x-y|<h} |u(y) - u(x)|^2 dy = \frac{c}{h^n} \int_{|z|<h} |u(x+z) - u(x)|^2 dz \end{aligned}$$

(неравенство Коши–Буняковского, стандартная оценка интеграла и замена переменных). Теперь оцениваем норму:

$$\begin{aligned} \|J_h u - u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \frac{c}{h^n} \int_{\Omega} dx \int_{|z|<h} |u(x+z) - u(x)|^2 dz = \\ &\frac{c}{h^n} \int_{|z|<h} dz \int_{\Omega} |u(x+z) - u(x)|^2 dx < \frac{c\varepsilon}{h^n} \int_{|z|<h} dz = c\varepsilon \kappa_n. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой Фубини и непрерывностью в среднеквадратичном. Следовательно, норму $\|J_h u - u\|_{L_2(\Omega)}$ можно сделать сколь угодно малой, уменьшая h . Лемма 1.1 доказана.

$\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L_2(\Omega)$. Лемма Дюбуа-Реймона

Теорема 1.3

Пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $u \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим область $Q_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Найдется такое $\delta > 0$, что $\|u\|_{L_2(\Omega \setminus Q_\delta)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Продолжим функцию u нулем вне Q_δ и обозначим это продолжение через U . По лемме об усреднении существует такой радиус $h > 0$, что $J_h U \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $\|J_h U - U\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Имеем $\|u - J_h U\|_{L_2(\Omega)} = \|u - U + U - J_h U\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u - U\|_{L_2(\Omega \setminus Q_\delta)} + \|J_h U - U\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$. Теорема 1.3 доказана.

Лемма 1.2 (Paul du Bois-Reymond / Поль Дюбуа-Реймон)

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\int_\Omega u(x) \varphi(x) dx = 0$. Тогда $u(x) = 0$ п.в. в Ω .

Доказательство — упражнение.

1 Пространства Лебега

2 Обобщённые производные

3 Принцип разбиения единицы

4 Пространства Соболева: определение, простые свойства, теорема о финитном продолжении и её следствия

Определение 1.4

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Будем называть *обобщённой производной* функции $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ функцию $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} D^\alpha u \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx.$$

Основные свойства обобщённых производных (о. п.).

- О. п. определена единственным образом. Это немедленно следует из леммы 1.2 (леммы Дюбуа-Реймона).
- О. п. не зависит от порядка дифференцирования, а именно: пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, существуют о. п. $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^\beta(D^\alpha u) \in L_{2,loc}(\Omega)$, тогда существует о.п. $D^{\alpha+\beta}u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^{\alpha+\beta}u = D^\beta(D^\alpha u)$.

Свойства обобщённых производных

Замечание. В отличие от классической производной, из существования о.п. порядка k не следует существование о.п. порядка $k - 1$ (придумайте пример функции $u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^2)$, когда существует о.п. $u_{x_1x_2}$, но не существует о.п. u_{x_1}).

- Линейность о.п.: если существуют о.п. $D^\alpha u, D^\alpha v \in L_{2,loc}(\Omega)$, то существует о.п. $D^\alpha(\lambda u + \mu v) \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ (λ, μ — произвольные числа).
- Пусть $v \in C^1(\Omega)$, $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и существует о.п. $u_{x_j} \in L_{2,loc}(\Omega)$. Тогда существует о.п. $(vu)_{x_j} \in L_{2,loc}(\Omega)$ и работает правило Лейбница $(vu)_{x_j} = v_{x_j}u + vu_{x_j}$.
- Пусть $\Omega' \subset \Omega$, $u \in L_2(\Omega)$ и существует о.п. $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$. Тогда сужение $u|_{\Omega'}$ имеет о.п. $D^\alpha(u|_{\Omega'}) \in L_2(\Omega')$ и $D^\alpha(u|_{\Omega'}) = D^\alpha u|_{\Omega'}$.
- Пусть Ω_1, Ω_2 — две области в $\mathbb{R}^n$, $u_j \in L_2(\Omega_j)$, существуют о.п. $D^\alpha u_j \in L_2(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, и $u_1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = u_2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$. Тогда существует о.п. склейки $D^\alpha u \in L_2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

Усреднение и обобщённое дифференцирование

Доказательства всех свойств о.п. — упражнения.

Лемма 1.3

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и существует о.п. $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$.

1) Для $x^0 \in \Omega$ при $0 < h < \text{dist}(x^0, \partial\Omega)$ имеем

$$J_h(D^\alpha u)(x^0) = D^\alpha(J_h u)(x^0).$$

2) Для подобласти $Q \Subset \Omega$ имеем $\|J_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$.

3) Если $\text{supp } u \subset \Omega$, то первый пункт выполнен для всех $x^0 \in \overline{\Omega}$ и $\|J_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$.

Первая часть леммы следует из свойства дифференцирования свёртки и определения 1.4. Вторая и третья часть вытекает из леммы 1.1 и свойств ядра усреднения. Слушателям предлагается доказать лемму 1.3 самостоятельно и со всей строгостью.

1 Пространства Лебега

2 Обобщённые производные

3 Принцип разбиения единицы

4 Пространства Соболева: определение, простые свойства, теорема о финитном продолжении и её следствия

Принцип разбиения единицы

Принцип разбиения единицы — замечательный инструмент анализа, позволяющий свести сложные глобальные задачи к локальным простым.

Теорема 1.4

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $\bigcup_{i \in I} U_i$ — покрытие K открытыми множествами (I — некоторое множество индексов). Тогда существует конечная система функций $\{\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}_{j=1}^N$, такая, что

- ❶ $\varphi_j(x) \geq 0$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- ❷ для любого $j \in \{1, \dots, N\}$ существует $i \in I$, такой, что $\text{supp } \varphi_j \subset U_i$;
- ❸ $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \leq 1$ в любой $x \in \mathbb{R}^n$ и $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ для любой $x \in K$.

Принцип разбиения единицы: доказательство

Доказательство. 1) Пусть $y \in K$. Тогда найдется такое число $i(y) \in I$, что $y \in U_{i(y)}$. Рассмотрим неотрицательную функцию $f_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем $\text{supp } f_y \subset U_{i(y)}$ и $f_y(y) = 1$.

2) Введём в рассмотрение открытое множество $G_y = f_y^{-1}(0, +\infty)$ (оно открыто как прообраз открытого множества при непрерывном отображении). Имеем новое покрытие компакта K системой $\{G_y\}_{y \in K}$. Выделим конечную подсистему $\{G_{y_j}\}_{j=1}^N$, покрывающую K , и обозначим объединение множеств из этой системы через G .

3) Воспользуемся срезающей функцией $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ со свойствами: $0 \leq g(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$; $g(x) = 1$, если $x \in K$; $\text{supp } g \subset G$.

Принцип разбиения единицы: доказательство

4) Положим

$$\varphi_j(x) = \frac{f_{y^j}(x)}{1 - g(x) + \sum_{k=1}^N f_{y^k}(x)}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Пусть $1 - g(x) = 0$. Тогда $x \in G$ и существует k : $f_{y^k}(x) \neq 0$ (по определению G). Наоборот, если все $f_{y^k}(x) = 0$, то $x \notin G$ и $g(x) = 0$. Следовательно, знаменатель выражения (2) не равен нулю.

Проверка пунктов 1–3 теоремы 1.4 не составляет большого труда. Принцип разбиения единицы доказан.

Замечание. Семейство функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ называется *разбиением единицы*, подчинённым покрытию $\{U_i\}_{i \in I}$.

- 1 Пространства Лебега
- 2 Обобщённые производные
- 3 Принцип разбиения единицы
- 4 Пространства Соболева: определение, простые свойства, теорема о финитном продолжении и её следствия

Пространство Соболева $H^k(\Omega)$



Сергей Львович Соболев (1908–1989)

Определение 1.5

Пусть k — натуральное число. Пространство Соболева $H^k(\Omega)$ состоит из всех (классов) функций $u \in L_2(\Omega)$, таких, что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ при $|\alpha| \leq k$ существует о.п. $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$.

Простые свойства $H^k(\Omega)$

В пространстве $H^k(\Omega)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v)_{L_2(\Omega)}.$$

К примеру, в пространстве $H^1(\Omega)$ скалярное произведение определяется формулой $(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L_2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.

Простейшие свойства пространств Соболева, вытекающие из свойств обобщённых производных (доказательства — упражнения).

- ❶ $H^k(\Omega)$ — гильбертово пространство.
- ❷ Если $\Omega' \subset \Omega$ и $u \in H^k(\Omega)$, то $u|_{\Omega'} \in H^k(\Omega')$.
- ❸ $u|_{\Omega_j} \in H^k(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, $u \in L_2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \Rightarrow u \in H^k(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.
- ❹ Пусть $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $u \in H^1(\Omega)$. Тогда $vu \in H^1(\Omega)$.

Лемма о плотности в кубе

Введём обозначения: $K_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i = 1, \dots, n\}$ — куб,
 $K_a^+ = \{x \in K_a : x_n > 0\}$ — верхний полукуб, $K_a^- = \{x \in K_a : x_n < 0\}$
— нижний полукуб, $K_a^0 = \{x \in K_a : x_n = 0\}$ — экватор куба.

Лемма 1.4

Пространство $C^\infty(\overline{K}_a)$ всюду плотно в $H^k(K_a)$.

Доказательство. Пусть $u \in H^k(K_a)$, $\sigma > 1$. Положим
 $u_\sigma(x) = u\left(\frac{x}{\sigma}\right)$. Для $h > 0$ имеем

$$\|u - J_h u_\sigma\|_{H^k(K_a)} \leq \|u - u_\sigma\|_{H^k(K_a)} + \|u_\sigma - J_h u_\sigma\|_{H^k(K_a)}.$$

По лемме 1.3 $\|u_\sigma - J_h u_\sigma\|_{H^k(K_a)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$. По теореме 1.3 о плотности для любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существует такая $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(K_a)$, что $\|D^\alpha u - \varphi_\alpha\|_{L_2(K_a)} < \varepsilon$.

Лемма о плотности в кубе

Для оценки нормы $\|u - u_\sigma\|_{H^k(K_a)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u - D^\alpha u_\sigma\|_{L_2(K_a)}^2$

воспользуемся функциями φ_α и неравенством

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u - D^\alpha u_\sigma\|_{L_2(K_a)} &\leq \|D^\alpha u - \varphi_\alpha\|_{L_2(K_a)} + \|\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha\sigma}\|_{L_2(K_a)} + \\ &\|\varphi_{\alpha\sigma} - D^\alpha u_\sigma\|_{L_2(K_a)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\|\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha\sigma}\|_{L_2(K_a)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 1 + 0$. Можно показать, что

$\|\varphi_{\alpha\sigma} - D^\alpha u_\sigma\|_{L_2(K_a)} \leq \sigma^{n/2} (\varepsilon + (1 - \sigma^{-|\alpha|}) \|D^\alpha u\|_{L_2(K_a)})$
(упражнение). Т.о. $\|u - J_h u_\sigma\|_{H^k(K_a)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$ и $\sigma \rightarrow 1 + 0$.

Лемма 1.4 доказана.

Теорема о финитном продолжении

По свойству 2 (см. слайд «Простые свойства $H^k(\Omega)$ ») для двух областей $\Omega' \subset \Omega$ определен оператор сужения $H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\Omega')$. Легко видеть, что этот оператор ограниченный.

Сечением оператора $A : X \rightarrow Y$ называется правый обратный оператор $R : Y \rightarrow X$, т.е. $AR = I_Y$. Сечение оператора сужения называется *продолжением*.

Теорема 1.5

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$, $\Omega \Subset Q \Subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует ограниченный оператор финитного продолжения $H^k(\Omega) \rightarrow H^k(Q)$, т.е. для любой функции $u \in H^k(\Omega)$ существует такая функция $U \in H^k(Q)$, что $U|_{\Omega} = u$, $\text{supp } U \subset Q$ и $\|U\|_{H^k(Q)} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}$, где константа C не зависит от u . Кроме того, существует компакт $K \subset Q$, содержащий носители всех продолжений.

Идея доказательства теоремы о продолжении

Многие глобальные утверждения в анализе можно доказать с помощью следующей схемы.

- Строится т.н. *модель* — частный случай утверждения для какой-нибудь простой области.
- Доказывается, что модель можно отобразить и получить локальное утверждение для произвольной области.
- С помощью разбиения единицы общий случай «склеивается» из локальных и доказывается глобальное утверждение.

Моделью для теоремы 5.5 служит следующая лемма.

Лемма 1.5

Пусть $u \in C^k(\overline{K}_a^-)$. Тогда существует такая функция $U \in C^k(\overline{K}_a)$, что $U|_{\overline{K}_a^-} = u$ и $\|U\|_{H^k(K_a)} \leq C\|u\|_{H^k(K_a^-)}$, где константа C не зависит от u .

Лемма о продолжении из полукуба в куб

Набросок доказательства. Продолжение U строится явно:

$$U(x) = u(x), x \in \overline{K_a}^-, U(x) = \sum_{j=0}^k A_j u\left(x', -\frac{x_n}{j+1}\right), x' = (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

$x \in \overline{K_a} \setminus \overline{K_a}^-$. Коэффициенты A_j определяются из условия гладкости функции U на K_a^0 : $\lim_{x_n \rightarrow +0} \partial_{x_n}^j U(x', x_n) = \lim_{x_n \rightarrow -0} \partial_{x_n}^j u(x', x_n) \forall x' \in K_a^0$, $\forall j = 0, \dots, k$. Получается СЛАУ с определителем Вандермонда $\Rightarrow$ коэффициенты A_j определяются однозначно. Остается проверить ограниченность в пространствах Соболева построенного оператора (подробное доказательство см. в книге В.П. Михайлова ‘Дифференциальные уравнения в частных производных’).

Лемма 1.6

Пусть $u \in H^k(K_a^-)$. Тогда существует такая функция $U \in H^k(K_a)$, что $U|_{K_a^-} = u$ и $\|U\|_{H^k(K_a)} \leq C \|u\|_{H^k(K_a^-)}$, причём константа C не зависит от u .

Теорема о плотности $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $H^k(\Omega)$

Это немедленно следует из леммы 1.5, леммы 1.4 и принципа непрерывного продолжения. Полное доказательство теоремы о продолжении будет дано в следующей презентации. В завершение настоящей презентации рассмотрим два важных следствия из теоремы 1.5.

Теорема 1.6

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$. Тогда $C^\infty(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $H^k(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $u \in H^k(\Omega)$, $\Omega \Subset Q$. Рассмотрим финитное продолжение $U \in H^k(Q)$ и усредним его. По свойству усреднения $\|J_h U - U\|_{H^k(Q)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$. Но $J_h U|_\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $\|J_h U - u\|_{H^k(\Omega)} \leq \|J_h U - U\|_{H^k(Q)}$.

Следовательно, $\|J_h U - U\|_{H^k(\Omega)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$, т.е. функции из $H^k(\Omega)$ могут быть сколь угодно точно аппроксимированы гладкими функциями. Теорема 1.6 доказана.

Сепарабельность пространства Соболева

Теорема 1.7

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$. Тогда пространство Соболева $H^k(\Omega)$ сепарабельно.

Доказательство. 1) Рассмотрим куб K_a , содержащий область Ω : $\Omega \in K_a$. Существует непрерывный оператор финитного продолжения $H^k(\Omega) \rightarrow H^k(K_a)$. По теореме о плотности в кубе пространство $C^\infty(\overline{K_a})$ всюду плотно в $H^k(K_a)$. Поэтому достаточно показать, что в $H^k(K_a)$ существует счётное подмножество, всюду плотное в подпространстве $\mathcal{D}(K_a)$.

2) Рассмотрим множество всех тригонометрических сумм с рациональными коэффициентами. Разложим произвольную функцию $u \in \mathcal{D}(K_a)$ и её производные до порядка k включительно в ряд Фурье: $(D^\beta u)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (D^\beta u)_\alpha e^{i(\alpha, \frac{\pi x}{a})}$.

Сепарабельность пространства Соболева

Ряд сходится в пространстве $L_2(K_a)$. Интегрируя по частям, находим коэффициент Фурье производной $D^\beta u$:

$$\begin{aligned}(D^\beta u)_\alpha &= \frac{1}{(2a)^n} \int_{K_a} (D^\beta u)(x) e^{-i(\alpha, \frac{\pi x}{a})} dx = \\ &= \frac{1}{(2a)^n} (-1)^{2|\beta|} (i\alpha)^\beta \int_{K_a} u(x) e^{-i(\alpha, \frac{\pi x}{a})} dx = (i\alpha)^\beta u_\alpha.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left\| u - \frac{1}{(2a)^n} \sum_{|\alpha| \leq N} (D^\beta u)_\alpha e^{i(\alpha, \frac{\pi x}{a})} \right\|_{H^k(K_a)} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Теорема 1.7 доказана.