

Вариационные проблемы уравнений в частных производных

I liked to imagine the objection as a Borgesian fabulation:
consider a person standing before the Book of Ages,
the chronicle that records every event, past and future.
— Ted Chiang, ‘Story of Your Life’

Пусть дана вариационная проблема:

$$E(u) = (u, u)' + 2\langle l, u \rangle \rightarrow \min, u \in H,$$

где H — (сепарабельное) гильбертово пространство, $(u, v)'$ — другое скалярное произведение в H с эквивалентной нормой, $l \in H^*$, т.е. l — линейный ограниченный функционал, $\langle l, u \rangle = l(u)$.

Теорема. Экстремаль $u_0 \in H$ функционала E , минимизирующая его, существует и единственна.

Пример 2.1. Найти функцию v_0 , реализующую минимум

функционала $E(v) = \int_0^1 (v'^2 + v^2) dx + 2 \int_0^1 v dx$ в

пространстве $H_0^1(0,1)$:

$$\begin{cases} \int_0^1 (v'^2 + v^2) dx + 2 \int_0^1 v dx \rightarrow \min, \\ v(0) = 0, v(1) = 0. \end{cases}$$

$$E(v) = \int_0^1 \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + v^2 \right) dx + 2 \int_0^1 v dx = (v, v)' + 2(1, v)_{L_2},$$

Решение. $H_0^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$,

$C^1L_2[0,1]$, $(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$, это пространство

неполное относительно нормы $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

- $L_2(0,1)$ — пространство Лебега квадратично интегрируемых

по Лебегу функций, $(u, v)_{L_2} = \int_0^1 uv dx$. $u = v$ в $L_2(0,1) \Leftrightarrow$

$u(x) = v(x)$ для почти всех $x \in (0,1)$. Пространство Лебега полное.

- $H^1(0,1) = \{u \in L_2(0,1) : \exists u' \in L_2(0,1)\}$, где u' — обобщённая (слабая) производная, если для любой

$\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ $\int_0^1 u' \varphi dx = - \int_0^1 u \varphi' dx$, $C^1[0,1] \subset H^1(0,1)$,

$\left| \frac{1}{2} - x \right| \in H^1(0,1)$, $\left| \frac{1}{2} - x \right|' = \text{sgn} \left(\frac{1}{2} - x \right)$. $H^1(0,1)$ —

пространство Соболева первого порядка.

$(u, v)_{H^1} = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$. $H^1(0,1)$ — гильбертово

пространство. Теорема вложения: $H^1(0,1) \subset C[0,1]$.

- $H^2(0,1) = \{u \in L_2(0,1) : \exists u', u'' \in L_2(0,1)\}$,

$(u, v)_{H^2} = \int_0^1 (u''v'' + u'v' + uv) dx$.

где $(u, v)' = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$ — стандартное (естественное)

скалярное произведение в $H_0^1(0,1)$, $(1, v) = \int_0^1 v dx$ —

скалярное произведение в $L_2(0,1)$,

$$\left| 2(1, v)_{L_2} \right| \leq 2 \|1\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq 2 \|v\|_{H^1}. \text{ Отсюда следует, что}$$

функция v_0 , реализующая минимум функционала энергии, существует и единственна.

Пусть $v_0 \in H_0^1(0,1)$ — экстремаль функционала E , минимизирующая его. Рассмотрим комбинацию $v_0 + t\delta v$, где $0 \neq \delta v \in H_0^1(0,1)$ — *вариация экстремали*, $t \in \mathbb{R}$. Имеем

выражение для приращения функционала энергии:

$$\begin{aligned} E(v_0 + t\delta v) - E(v_0) &= (v_0 + t\delta v, v_0 + t\delta v)' + 2(1, v_0 + t\delta v) - (v_0, v_0)' - \\ &- 2(1, v_0) = (v_0, v_0)' + 2t(v_0, \delta v)' + t^2(\delta v, \delta v)' + 2(1, v_0) + 2t(1, \delta v) - \\ &- (v_0, v_0)' - 2(1, v_0) = t^2(\delta v, \delta v)' + 2t((v_0, \delta v)' + (1, \delta v)) \geq 0 \text{ для} \\ &\text{любого } t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{необходимое условие экстремали} \\ &(v_0, \delta v)' + (1, \delta v) = 0 \text{ для любой вариации } \delta v \in H_0^1(0,1), \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (v_0' \delta v' + v_0 \delta v) dx + \int_0^1 \delta v dx = 0.$$

Предположим, что $v_0 \in H^2(0,1)$. Тогда, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$v_0' \delta v \Big|_0^1 - \int_0^1 v_0'' \delta v dx + \int_0^1 v_0 \delta v dx + \int_0^1 \delta v dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (-v_0'' + v_0 + 1) \delta v dx = 0 \text{ для любой } \delta v \in H_0^1(0,1). \text{ Но } \delta v$$

можно взять из $C_0^\infty(0,1) \Rightarrow -v_0'' + v_0 + 1 = 0$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $E = E(v)$.

Лемма Дюбуа-Реймона. Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и для любой основной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u \varphi dx = 0.$$

Тогда $u(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$.

Имеем краевую задачу вида

$$\begin{cases} v_0'' - v_0 = 1, 0 < x < 1, \\ v_0(0) = 0, v_0(1) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид $v_0(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - 1$. Подстановка в краевые условия даёт

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 - 1 = 0, A \operatorname{ch} 1 + B \operatorname{sh} 1 - 1 = 0.$$

Отсюда $A = 1, B = \frac{1 - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$.

Таким образом, $v_0(x) = \operatorname{ch} x + \frac{1 - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x - 1$ — экстремаль функционала энергии $E = E(v), v \in H_0^1(\Omega)$.

Пример 2.2. Доказать, что для всех функций $u \in H^1(\Omega)$, где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям $u|_{x_1=0} = 0, u|_{x_2=0} = 0$,

$$u|_{x_2=0} = x_1, u|_{x_1=1} = x_2,$$

справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \geq \frac{2}{3}.$$

Имеет ли место

равенство для каких-

нибудь из этих функций?

Решение. Имеем вариационную проблему

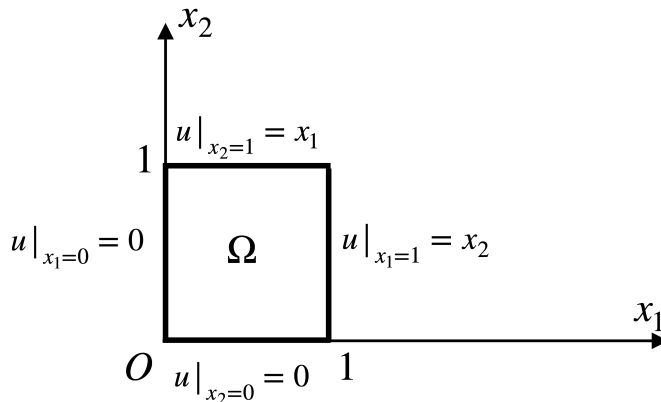
$$E(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx_1 dx_2 \rightarrow \min,$$

$$u \in H^1(\Omega), u|_{x_1=0} = 0, u|_{x_2=0} = 0, u|_{x_2=0} = x_1, u|_{x_1=1} = x_2.$$

Редукция: $u = v + w$, где $w \in H^1(\Omega), w|_{x_1=0} = 0, w|_{x_2=0} = 0$,

$w|_{x_2=0} = x_1, w|_{x_1=1} = x_2$, например, $w = x_1 x_2, v \in H_0^1(\Omega)$.

Преобразуем функционал энергии:



$$\begin{aligned}
E(u) &= E(v + w) = \iint_{\Omega} \left((v_{x_1} + x_2)^2 + (v_{x_2} + x_1)^2 \right) dx_1 dx_2 = \\
&= \iint_{\Omega} \left(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 \right) dx_1 dx_2 + 2 \iint_{\Omega} \left(x_2 v_{x_1} + x_1 v_{x_2} \right) + \iint_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2,
\end{aligned}$$

где

$$\iint_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_2 = \int_0^1 \left(x_1^2 + \frac{1}{3} \right) dx_1 = \frac{2}{3};$$

Новая вариационная проблема:

$$\tilde{E}(v) = \iint_{\Omega} \left(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 \right) dx_1 dx_2 + 2 \iint_{\Omega} \left(x_2 v_{x_1} + x_1 v_{x_2} \right) dx_1 dx_2 \rightarrow \min,$$

$v \in H_0^1(\Omega)$. Введём обозначения:

- $(v, \tilde{v})' = \iint_{\Omega} \left(v_{x_1} \tilde{v}_{x_1} + v_{x_2} \tilde{v}_{x_2} \right) dx_1 dx_2$ — скалярное

произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева;

- $(v, \tilde{v}) = \iint_{\Omega} \left(v_{x_1} \tilde{v}_{x_1} + v_{x_2} \tilde{v}_{x_2} + v \tilde{v} \right) dx_1 dx_2$ — стандартное скал.

произведение в $H_0^1(\Omega)$.

- $\langle l, v \rangle = \iint_{\Omega} \left(x_2 v_{x_1} + x_1 v_{x_2} \right) dx_1 dx_2$ — линейный

ограниченный функционал над $H_0^1(\Omega)$.

Тогда функционал можно записать в виде

$$\tilde{E}(v) = (v, v)' + 2\langle l, v \rangle.$$

По основной теореме этот функционал допускает

единственную экстремаль, которая его минимизирует.

Получим уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$.

Пусть $v \in H_0^1(\Omega)$ — экстремаль функционала энергии,

минимизирующая его. Рассмотрим $\delta v \in H_0^1(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$, найдём приращение функционала:

$$\begin{aligned}
0 \leq \tilde{E}(v + t\delta v) - \tilde{E}(v) &= (v + t\delta v, v + t\delta v)' + 2\langle l, v + t\delta v \rangle - (v, v)' - 2\langle l, v \rangle = \\
&= t^2(\delta v, \delta v)' + 2t((v, \delta v)' + \langle l, \delta v \rangle) \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}(\tilde{E}(v + t\delta v) - \tilde{E}(v)) \Big|_{t=0} &= 0 \Rightarrow (v, \delta v)' + \langle l, \delta v \rangle = 0 \text{ для}
\end{aligned}$$

$\forall \delta v \in H_0^1(\Omega)$. Последнее равенство перепишем в

интегральном виде:

$$\iint_{\Omega} (v_{x_1} \delta v_{x_1} + v_{x_2} \delta v_{x_2}) dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} (x_2 \delta v_{x_1} + x_1 \delta v_{x_2}) dx_1 dx_2 = 0.$$

Предположим, что $v \in H^2(\Omega)$. Вспомним формулу многомерного интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} f_{x_j} g dx = \int_{\partial\Omega} f g \nu_j ds - \int_{\Omega} f g_{x_j} dx.$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$-\iint_{\Omega} (v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2}) \delta v dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} (x_2 \delta v_{x_1} + x_1 \delta v_{x_2}) dx_1 dx_2 = 0$$

(интеграл по границе равен нулю, т.к. $\delta v|_{\partial\Omega} = 0$).

Интегрируем по частям второй интеграл:

$$-\iint_{\Omega} (v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2}) \delta v dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) \delta v dx_1 dx_2 = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} (v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2}) \delta v dx_1 dx_2 = 0 \text{ для любой } \delta v \in H_0^1(\Omega). \text{ По}$$

лемме Дюбуа-Реймона $\Delta v = 0$, т.е. уравнение Лапласа есть уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$ над $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Из единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области следует, что $v = 0$.

Т.о. экстремаль функционала $E = E(u)$, $u \in H^1(\Omega)$,
 $u|_{x_1=0} = 0$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_2=0} = x_1$, $u|_{x_1=1} = x_2$, есть
 $u = w = x_1 x_2$; неравенство доказано.

Пример 2.3. Пусть $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ —
 кольцо. Найти

$$\min_{u \in H^1(Q), u|_{|x|=1}=0} \left(\int_Q (|\nabla u|^2 + 4u) dx + \int_{|x|=2} u^2 ds \right).$$

Решение.

Преобразуем функционал
 энергии:

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_Q (|\nabla u|^2 + 4u) dx + \\ &+ \int_{|x|=2} u^2 ds = \iint_Q |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{|x|=2} u^2 ds + 2 \iint_Q 2u dx_1 dx_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

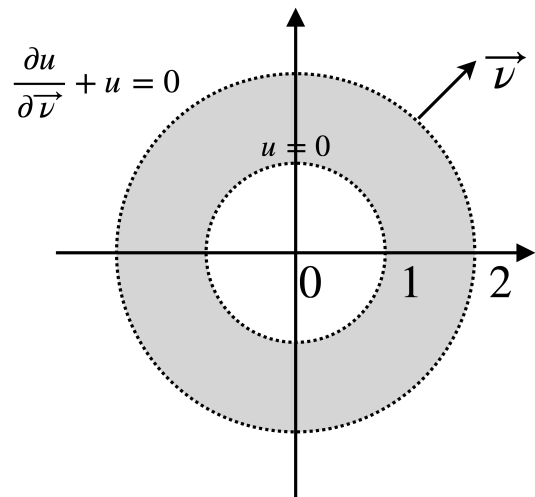
$$E(u) = (u, u)' + 2(2, u)_{L_2(Q)},$$

где $(u, v)' = \iint_Q \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} uv ds$ — скалярное

произведение в $\tilde{H}^1(Q) = \left\{ u \in H^1(Q) : u|_{|x|=1} = 0 \right\}$,

порождающее норму, эквивалентную стандартной норме
 пространства Соболева (это следует из теоремы об
 эквивалентной норме).

Рассмотрим $\delta u \in \tilde{H}^1(Q)$, $t \in \mathbb{R}$, получим приращение
 функционала энергии:



$$\begin{aligned}
E(u + t\delta u) - E(u) &= (u + t\delta u, u + t\delta u)' + 2(2, u + t\delta u) - (u, u)' - 2(2, u) = \\
&= (u, u)' + 2t(u, \delta u)' + t^2(\delta u, \delta u)' + 2(2, u) + 2t(2, \delta u) - (u, u)' - 2(2, u) = \\
&= t^2(\delta u, \delta u)' + 2t((u, \delta u)' + (2, \delta u)) \geq 0 \text{ для любого } t \in \mathbb{R} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$(u, \delta u)' + (2, \delta u) = 0$ для $\delta u \in \tilde{H}^1(Q)$. Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$. Вернёмся к интегралам:

$$\iint_Q \nabla u \cdot \nabla(\delta u) dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} u \delta u ds + \iint_Q 2 \delta u dx_1 dx_2 = 0.$$

Предположим дополнительно, что экстремаль $u \in H^2(Q)$.

Получим тогда уравнение Эйлера—Лагранжа, проинтегрировав по частям первый из интегралов:

$$\begin{aligned}
\iint_Q \nabla u \cdot \nabla(\delta u) dx_1 dx_2 &= \iint_Q \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = - \iint_Q \Delta u \cdot \delta u dx_1 dx_2 + \\
+ \int_{\partial Q} \delta u \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j ds &= - \iint_Q \Delta u \cdot \delta u dx_1 dx_2 + \int_{|x|=1} \delta u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} ds + \int_{|x|=2} \delta u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} ds = \\
&= - \iint_Q \Delta u \cdot \delta u dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} \delta u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} ds. \text{ Подставим этот}
\end{aligned}$$

результат в интегральное тождество:

$$\begin{aligned}
- \iint_Q \Delta u \cdot \delta u dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} \delta u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} ds + \int_{|x|=2} u \delta u ds + \iint_Q 2 \delta u dx_1 dx_2 &= 0 \\
\Rightarrow \iint_Q (-\Delta u + 2) \delta u dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} + u \right) \delta u ds &= 0 \text{ для} \\
\forall \delta u \in \tilde{H}^1(Q).
\end{aligned}$$

- Для любой $\delta u \in \mathcal{D}(Q) = C_0^\infty(Q) \subset \tilde{H}^1(Q)$ имеем

$\iint_Q (-\Delta u + 2)\delta u dx_1 dx_2 = 0$. По лемме Дюбуа-Реймона

$\Delta u = 2$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала энергии (уравнение Пуассона).

- Одно краевое условие уже есть: $u|_{|x|=1} = 0$.
- Рассмотрим произвольную гладкую функцию $\psi \in C^\infty(C)$, где $C = \{|x| = 2\}$. Тогда можно считать, что

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + u \right) \psi ds = 0. \text{ Действительно, функцию } \psi \text{ можно}$$

поднять (продолжить) до функции $\delta u \in \tilde{H}^1(Q)$, т.е.

$\delta u|_C = \psi$, так, чтобы $\text{supp } \delta u \subset \{2 - \varepsilon \leq |x| \leq 2\} = Q_\varepsilon$,

$$\|\delta u\|_{L_2(Q_\varepsilon)} = O(1), \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\left| \iint_{Q_\varepsilon} (-\Delta u + 2)\delta u dx_1 dx_2 \right| \leq \|-\Delta u + 2\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \|\delta u\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. По лемме Дюбуа-Реймона $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + u \Big|_{|x|=2} = 0$ —

краевое условие третьего рода на внешней окружности.

Получили краевую задачу для экстремали:

$$\begin{cases} \Delta u = 2, 1 < r < 2, -\infty < \theta < \infty, \\ u(r, \theta + 2\pi) \equiv u(r, \theta), \\ u|_{r=1} = 0, \\ u_r + u|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что решение можно найти в виде $u = u(r)$.

Имеем одномерную краевую задачу

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = 2, 1 < r < 2, \\ u(1) = 0, \\ u'(2) + u(2) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения: $u = A \ln r + B + \frac{r^2}{2}$. Подстановка в краевые условия даёт уравнения для A и B :

Вычисления показывают, что минимум равен $\frac{\pi}{2(1 + \ln 4)}(51 - 94 \ln 2) \approx -9.318185532$.

Пример 2.4. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ — единичный трёхмерный шар. Показать, что для всех функций $u \in H^1(B)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = \cos \theta$, где θ — широта в сферической системе координат, справедливо неравенство

$$\iiint_B \left(|\nabla u|^2 + 2u \right) dx_1 dx_2 dx_3 \geq \frac{56\pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

Решение. Имеем вариационную проблему

$$E(u) = \iiint_B \left(|\nabla u|^2 + 2u \right) dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow \min,$$

где $u \in H^1(B)$, $u|_{|x|=1} = \cos \theta$. Сделаем редукцию: $u = v + w$, в которой $v \in H_0^1(B)$, $w \in H^1(B)$ — функция, удовлетворяющая краевому условию $w|_{|x|=1} = \cos \theta$. Проще всего взять $w = x_3 = \rho \cos \theta$, $\rho = |x|$. Преобразуем функционал энергии:

$$\begin{aligned} E(u) &= E(v + w) = \iiint_B \left(|\nabla v + \nabla w|^2 + 2v + 2w \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \iiint_B \left(|\nabla v|^2 + 2v \right) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_B 2 \nabla v \cdot \nabla w dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &+ \iiint_B \left(|\nabla w|^2 + 2w \right) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Вычисляем:

$$B + \frac{1}{2} = 0, \frac{A}{2} + 2 + A \ln 2 + B + 2 = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}, A = \frac{-7}{1 + \ln 4}.$$

Следовательно, экстремаль имеет вид

$$u = -\frac{7 \ln r}{1 + \ln 4} - \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} = -\frac{7}{1 + \ln 4} \ln |x| + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \iiint_B \left(|\nabla w|^2 + 2w \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_B (1 + 2x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \frac{4}{3}\pi + \iiint_B 2x_3 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4}{3}\pi; \\ \bullet \quad & \iiint_B 2 \nabla v \cdot \nabla w dx_1 dx_2 dx_3 = 2 \iiint_B \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим функционал

$$\tilde{E}(v) = \iiint_B |\nabla v|^2 + 2 \iiint_B v dx_1 dx_2 dx_3 + 2 \iiint_B \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3.$$

По теореме об эквивалентной норме билинейная

симметрическая форма $(v_1, v_2)' = \iiint_B \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx_1 dx_2 dx_3$ есть

скалярное произведение в $H_0^1(B)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева.

Далее, $H_0^1(B) \ni v \mapsto \langle l, v \rangle = \iiint_B \left(v + \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$ есть

линейный ограниченный функционал над $H_0^1(B)$. Поэтому функционал $\tilde{E}$ можно переписать в виде

$$\tilde{E}(v) = (v, v)' + 2\langle l, v \rangle,$$

поэтому к нему применима основная теорема.

Получим уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$. Пусть $v \in H_0^1(B)$ — единственная экстремаль функционала $\tilde{E}$. Рассмотрим вариацию $\delta v \in H_0^1(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$, и найдём приращение функционала:

$$0 \leq \tilde{E}(v + t\delta v) - \tilde{E}(v) = (v + t\delta v, v + t\delta v)' + 2\langle l, v + t\delta v \rangle - (v, v)' - 2\langle l, v \rangle = \\ = t^2(\delta v, \delta v)' + 2t((v, \delta v)' + \langle l, \delta v \rangle) \Rightarrow$$

$(v, \delta v)' + \langle l, \delta v \rangle = 0$ для всех $\delta v \in H_0^1(B)$. Перепишем последнее равенство в явном виде:

$$\iiint_B \nabla v \cdot \nabla \delta v dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_B \left(\delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Предположим, что $v \in H^2(B)$. Проинтегрируем по частям первый из тройных интегралов в последней формуле:

$$\iiint_B \nabla v \cdot \nabla \delta v dx_1 dx_2 dx_3 = - \iiint_B \Delta v \cdot \delta v dx_1 dx_2 dx_3,$$

т.к. $\delta v|_{\partial B} = 0$. Интегрируем по частям интеграл с $\frac{\partial \delta v}{\partial x_3}$:

$$\iiint_B \frac{\partial \delta v}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial B} \delta v|_{\partial B} \nu_3 ds - \iiint_B \delta v \frac{\partial 1}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

поскольку $\delta v|_{\partial B} = 0$. Итак, если $v \in H_0^1(B) \cap H^2(B)$, то для любой $\delta v \in H_0^1(\Omega)$

$$\iiint_B (-\Delta v + 1) \delta v dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Из леммы Дюбуа-Реймона следует, что $\Delta v = 1$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$. Имеем задачу Дирихле для экстремали:

$$\begin{cases} \Delta v = 1, 0 < \rho < 1, \\ v|_{\rho=1} = 0, \\ v = O(1), \rho \rightarrow +0. \end{cases}$$

Решение этой краевой задачи можно найти в виде $v = v(\rho)$. Имеем одномерную краевую задачу

$$\begin{cases} v'' + \frac{2}{\rho}v' = 1, 0 < \rho < 1, \\ v(\rho) = O(1), \rho \rightarrow +0, \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения: $v = \frac{A}{\rho} + B + \frac{1}{6}\rho^2$. Подстановка в

асимптотическое и краевое условия даёт константы интегрирования A и B : $A = 0, B + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$. Отсюда

$$v = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\rho^2. \text{ Вычисления показывают, что } \tilde{E}(v) = -\frac{4\pi}{45}.$$

$$\text{Отсюда } E(u) = \tilde{E}(v) + E(w) = -\frac{4\pi}{45} + \frac{4\pi}{3} = \frac{56\pi}{45}.$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $u = v + w = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_3$.

Пример 2.5. Краевая задача

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

эквивалентна вариационной проблеме вида

$$E(u) = \int_0^1 ((u')^2 + u^2) dx - 2 \int_0^1 x u dx \rightarrow \min, u \in H^1(0,1).$$

А именно, единственная экстремаль функционала энергии есть обобщённое решение краевой задачи (покажите это самостоятельно). С другой стороны, задача (1) имеет единственное решение, которое легко найти:

$$\hat{u}(x) = A \cosh x + B \sinh x + x, \hat{u}'(x) = A \sinh x + B \cosh x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \sinh 0 + B \cosh 0 + 1 = 0, \\ A \sinh 1 + B \cosh 1 + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1, \\ A = \frac{-1 + \cosh 1}{\sinh 1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{u}(x) = \frac{-1 + \cosh 1}{\sinh 1} \cosh x - \sinh x + x.$$

Рассмотрим в пространстве $H^1(0,1)$ базис $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ и организуем схему метода Ритца построения минимизирующей последовательности $\{u_k\}_{k=0}^\infty$, сходящейся к экстремали. Пусть $u_k(x) = c_0^{(k)}e_0(x) + c_1^{(k)}e_1(x) + \dots + c_k^{(k)}e_k(x)$,

$$(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx \text{ — стандартное скалярное}$$

произведение в $H^1(0,1)$. Тогда вариационная проблема на подпространстве $E_k = \text{Lin}(e_0, e_1, \dots, e_k)$ имеет вид

$$E(u_k) = \sum_{i,j=0}^k (e_i, e_j) c_i^{(k)} c_j^{(k)} - 2 \sum_{i=0}^k c_i^{(k)} (x, e_i)_{L_2(0,1)} \rightarrow \min.$$

Пусть $G^{(k)} = \left((e_i, e_j) \right)_{i,j=0}^k$ — матрица Грама порядка $(k+1)$ системы $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$;

$$f^{(k)} = \left((x, e_0)_{L_2(0,1)}, (x, e_1)_{L_2(0,1)}, \dots, (x, e_k)_{L_2(0,1)} \right)^T \text{ — столбец}$$

скалярных произведений. Тогда единственная точка

экстремума $\hat{c}^{(k)} = \left(c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \dots, c_k^{(k)} \right)^T$ есть решение системы линейных уравнений

$$G^{(k)} \hat{c}^{(k)} = f^{(k)} \Rightarrow \hat{c}^{(k)} = G^{-(k)} f^{(k)}.$$

Итак, k -ое приближение Ритца имеет вид $u_k(x) = \sum_{i=0}^k \hat{c}^{(k)} x^k$.

Последовательность приближений Ритца $u_k \rightarrow \hat{u}$ при $k \rightarrow \infty$ в $H^1(0,1)$.