

Разделение переменных в полярных и сферических координатах

1. Полярные координаты

Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad (1)$$

где ρ — полярный радиус, θ — полярный угол, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, x, y — декартовы координаты. Получим формулу (1). Для этого, во-первых, выразим производные по полярным координатам через производные по декартовым координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Теперь выразим вторые производные по ρ и θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\rho \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho \sin \theta \left(-\rho \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \\
& + \rho \cos \theta \left(-\rho \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = \rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\
& - 2\rho^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}.
\end{aligned}$$

Разделим последнее равенство на ρ^2 и сложим с предыдущим — член со смешанной производной сократится:

$$\begin{aligned}
& \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.
\end{aligned}$$

Пример 1.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Получим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 < R^2, \\ u|_{x^2+y^2=R^2} = \varphi \end{cases} \quad (2)$$

разделением переменных в полярных координатах ρ, θ :

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta.$$

Уравнение Лапласа в полярных координатах ρ, θ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Шаг 1. Найдём нетривиальные гармонические функции в проколотом круге, имеющие вид $U(\rho, \theta) = Z(\rho)Y(\theta)$.

Подстановка в уравнение Лапласа и периодическое условие $U(\rho, \theta + 2\pi) \equiv U(\rho, \theta)$ дают соотношения

$$Z''(\rho)Y(\theta) + \frac{1}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta) + \frac{1}{\rho^2}Z(\rho)Y''(\theta) = 0,$$

$$Z(\rho)Y(\theta + 2\pi) \equiv Z(\rho)Y(\theta).$$

Из периодического условия и нетривиальности функций Z и Y следует, что $Y(\theta + 2\pi) \equiv Y(\theta)$. Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda = \text{const},$$

поскольку ρ и θ — независимые переменные. Спектральная задача имеет вид

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \lambda Y(\theta), & -\infty < \theta < \infty, \\ Y(\theta + 2\pi) \equiv Y(\theta). \end{cases} \quad (3)$$

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $-Y''(\theta) = \lambda Y(\theta)$ следует эквивалентность задачи (3) и задачи вида

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \lambda Y(\theta), & 0 < \theta < 2\pi, \\ Y(0) = Y(2\pi), \\ Y'(0) = Y'(2\pi). \end{cases} \quad (4)$$

Оператор $\mathcal{A} = -\frac{d^2}{d\theta^2}$ — неограниченный, самосопряжённый и неотрицательно полуопределённый оператор в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ с область определения

$$D(\mathcal{A}) = \{Y \in H^2(0, 2\pi) : Y(0) = Y(2\pi), Y'(0) = Y'(2\pi)\},$$

поэтому его собственные значения принадлежат $[0, +\infty)$.

Легко видеть, что $\lambda_0 = 0$ — собственное значение, $Y_0 = 1$ —

соответствующая ему собственная функция. Пусть $\omega = \lambda$,

тогда общее решение уравнения задачи (4) есть

$Y(\theta) = A \cos \omega \theta + B \sin \omega \theta$. Подстановка общего решения в условия задачи (4) даёт систему

$$\begin{cases} A(\cos 2\pi\omega - 1) + B \sin 2\pi\omega = 0, \\ A(-\omega \sin 2\pi\omega) + B(\omega \cos 2\pi\omega - \omega) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда её определитель равен нулю. Последний равен $4\omega \sin^2 \pi\omega$. Отсюда характеристическое уравнение для собственных значений задачи (4) есть $\sin^2 \pi\omega = 0$. Его корни $\omega_k = k, k \in \mathbb{N}$. Поэтому все положительные собственные значения спектральной задачи есть $\lambda_k = k^2$, а соответствующие независимые собственные функции, $Y_k^{(1)}(\theta) = \cos(k\theta)$, $Y_k^{(2)}(\theta) = \sin(k\theta)$ (так как при $\omega = k$ (5) тривиальна). Таким образом, все положительные собственные значения задачи (4) (следовательно, и задачи (3)) имеют кратность два.

Упорядоченное множество собственных функций

$$\{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots\}$$

образует ортогональный базис в $L_2(0, 2\pi)$.

Шаг 2. Функция $\varphi \in L_2(0, 2\pi)$, поэтому она допускает разложение в ряд по собственным функциям из первого шага. Это разложение имеет вид классического тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta),$$

в котором коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) \cos(k\psi) d\psi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) \sin(k\psi) d\psi \quad (6)$$

следующим из общей формулы для коэффициентов Фурье функции $\varphi \in L_2(0, 2\pi)$ относительно ортогонального базиса

$$\{e_0, e_1, e_2, \dots\}: \varphi_k = \frac{(\varphi, e_k)}{\|e_k\|^2}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(0, 2\pi)$. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(\rho, \theta) = \frac{A_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\rho) \cos(k\theta) + B_k(\rho) \sin(k\theta) \quad (7)$$

с неизвестными коэффициентами-функциями $A_k = A_k(\rho)$ и $B_k = B_k(\rho)$. Перепишем задачу (2) в полярных координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, 0 < \rho < R, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u(R, \theta) = \varphi(\theta), \\ \max_{\theta} |u(\rho, \theta)| = o(\ln \rho), \rho \rightarrow 0. \end{cases}$$

Подставим разложение (7) в уравнение Лапласа и краевое условие Дирихле, формально (т.е. к каждому члену ряда) применив оператор Лапласа и оператор следа на окружности:

$$\frac{1}{2} (\rho^2 A_0'' + \rho A_0') + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^2 A_k'' + \rho A_k' - k^2 A_k) \cos k\theta + (\rho^2 B_k'' + \rho B_k' - k^2 B_k) \sin k\theta = 0,$$

$$\frac{A_0(R)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(R) \cos k\theta + B_k(R) \sin k\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta.$$

Приравнявая коэффициенты Фурье из правых частей равенств к соответствующим коэффициентам Фурье из левых частей, имеем уравнения и краевые условия задач для A_k и B_k .

Также мы должны позаботиться о том, чтобы отыскиваемое решение не имело особенности в центре круга, когда $\rho \rightarrow +0$.

Пусть $m(\rho) = \max_{\theta} |u(\rho, \theta)|$. Тогда, согласно теореме об

устранимой особенности, если $m(\rho) = o(\ln \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$, то

функция $u = u(\rho, \theta)$ допускает гармоническое продолжение в точку $\rho = 0$. Очевидно, что максимум по углу θ модуля каждого члена ряда (7) есть $\sqrt{A_k(\rho)^2 + B_k(\rho)^2}$ (максимум нулевого члена равен $\frac{1}{2} |A_0(\rho)|$). Поэтому условия $A_k(\rho) = o(\ln \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$ ($k=0, 1, 2, \dots$), $B_k(\rho) = o(\ln \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$ ($k \in \mathbb{N}$) необходимы для условий теоремы об устранимой особенности. Эти условия дают краевые задачи для коэффициентов A_k вида

$$\begin{cases} \rho^2 A_k'' + \rho A_k' - k^2 A_k = 0, 0 < \rho < R, \\ A_k(\rho) = o(\ln \rho), \rho \rightarrow +0, \\ A_k(R) = a_k, \end{cases} \quad (8)$$

и вполне аналогичные им краевые задачи для коэффициентов B_k :

$$\begin{cases} \rho^2 B_k'' + \rho B_k' - k^2 B_k = 0, 0 < \rho < R, \\ B_k(\rho) = o(\ln \rho), \rho \rightarrow +0, \\ B_k(R) = b_k, \end{cases} \quad (9)$$

Общее решение уравнения

$$\rho^2 Z'' + \rho Z' - k^2 Z = 0$$

имеет вид $Z_k(\rho) = C_k \rho^{-k} + D_k \rho^k$ для $k \in \mathbb{N}$ и

$Z_0(\rho) = C_0 \ln \rho + D_0$ при $k = 0$. Отсюда немедленно получаем единственное решение задач (8) и (9):

$$A_0(\rho) = a_0, A_k(\rho) = a_k \left(\frac{\rho}{R} \right)^k, B_k(\rho) = b_k \left(\frac{\rho}{R} \right)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение задачи (2) можно представить в виде ряда

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)), \quad (10)$$

где коэффициенты a_0 , a_k и b_k ($k \in \mathbb{N}$) можно найти по формуле (6).

Получим из формулы (10) формулу Пуассона. Для этого подставим выражения для коэффициентов Фурье (6), заменив в них переменную интегрирования θ на ψ , в формулу (10):

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) d\psi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \left(\frac{1}{\pi} \cos(k\theta) \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) \cos(k\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sin(k\theta) \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) \sin(k\psi) d\psi \right).$$

Действуя формально, меняем

ряд и интеграл местами, пользуемся одной

$$\begin{aligned} \text{тригонометрической формулой: } u(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) d\psi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \varphi(\psi) d\psi \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k (\cos(k\theta) \cos(k\psi) + \sin(k\theta) \sin(k\psi)) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \cos(k(\theta - \psi)) \right) \varphi(\psi) d\psi. \end{aligned}$$

Представим ядро получившейся интегральной формулы в явном виде, применив древнюю формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии и формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \cos(k(\theta - \psi)) &= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \cos(k(\theta - \psi)) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \Re e^{k(i(\theta - \psi) + \ln \frac{\rho}{R})} = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \Re \sum_{k=0}^{\infty} e^{k(i(\theta - \psi) + \ln \frac{\rho}{R})} = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \\ &\cdot \Re \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\theta - \psi)}} = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \Re \frac{R}{R - \rho \cos(\theta - \psi) - i\rho \sin(\theta - \psi)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{R(R - \rho \cos(\theta - \psi))}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{-R^2 + 2R\rho \cos(\theta - \psi) - \rho^2 + 2R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi)}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} = \\
&= \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \frac{1}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}.
\end{aligned}$$

Итак, интегральная формула для решения задачи (2) имеет вид

$$u(\rho, \theta) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\psi) d\psi}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}. \quad (11)$$

Сравним её с формулой, которую мы получили в теме 4 практических занятий:

$$u(|x^0| \cos \theta, |x^0| \sin \theta) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\psi)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0| \cos(\psi - \theta)} R d\psi$$

(мы поменяли обозначали переменной интегрирования и внешней переменной — полярного угла). Поскольку $|x^0| = \rho$, эта формула совпадает с формулой (11).

Пример 1.5. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в полудиске. Пусть

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ (полудиск). Найдём собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ в Ω с краевыми условиями. Имеем задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u|_{\rho=1} = 0, \\ -u_\theta|_{\theta=0} = 0, u_\theta|_{\theta=\pi} = 0, \\ \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |u(\rho, \theta)| = O(1), \rho \rightarrow 0. \end{cases} \quad (12)$$

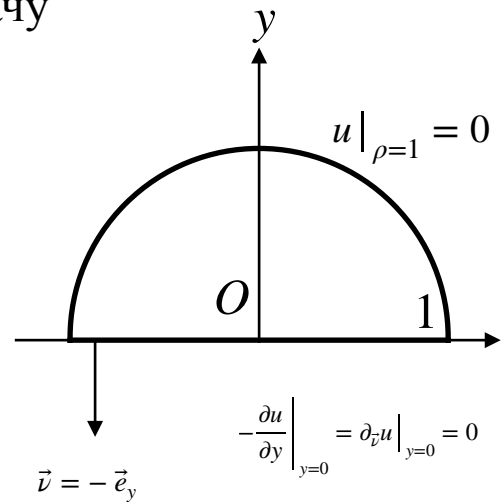
Найдём собственные значения и собственные функции методом разделения переменных в полярных координатах.

Шаг 1. Рассмотрим специальную задачу

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ U_\theta|_{\theta=0} = 0, U_\theta|_{\theta=\pi} = 0. \end{cases}$$

Подставим в неё $U(\rho, \theta) = Z(\rho)Y(\theta)$:

$$\begin{cases} -Z''(\rho)Y(\theta) - \frac{1}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta) - \\ -\frac{1}{\rho^2}Z(\rho)Y''(\theta) = \lambda Z(\rho)Y(\theta), \\ 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ Z(\rho)Y'(0) \equiv 0, Z(\rho)Y'(\pi) \equiv 0. \end{cases}$$



Из краевых условий немедленно следует, что $Y'(0) = 0$, $Y'(\pi) = 0$. Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) + \lambda \rho^2 Z(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \text{const} = \mu.$$

Имеем задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \mu Y(\theta), 0 < \theta < \pi, \\ Y'(0) = 0, Y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Её решение: $\mu_k = k^2$, $Y_k(\theta) = \cos(k\theta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Шаг 2. Вернёмся к исходной спектральной задаче. Сделаем теперь подстановку $u(\rho, \theta) = Z(\rho)Y_k(\theta) = Z(\rho)\cos(k\theta)$.

1) Условие Дирихле: $Z(1)Y_k(\theta) \equiv 0 \Rightarrow Z(1) = 0$.

2) Асимптотическое условие:

$$\max_{\theta \in [0, \pi]} |Z(\rho)\cos(k\theta)| = |Z(\rho)| = O(1), \rho \rightarrow +0 \Rightarrow$$

$$Z(\rho) = O(1), \rho \rightarrow +0.$$

Уравнение для $Z = Z(\rho)$ имеет вид

$$\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) + (\lambda \rho^2 - k^2) Z(\rho) = 0 \text{ или}$$

$$-Z''(\rho) - \frac{1}{\rho}Z'(\rho) + \frac{k^2}{\rho^2}Z(\rho) = \lambda Z(\rho). \text{ Имеем одномерную}$$

спектральную задачу для функции $Z = Z(\rho)$:

$$\begin{cases} -Z''(\rho) - \frac{1}{\rho}Z'(\rho) + \frac{k^2}{\rho^2}Z(\rho) = \lambda Z(\rho), 0 < \rho < 1, \\ Z(1) = 0, Z(\rho) = O(1), \rho \rightarrow +0. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда имеем уравнение

$$\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) - k^2 Z(\rho) = 0.$$

Общее решение имеет вид $Z_k(\rho) = C_k \rho^{-k} + D_k \rho^k$ для $k \in \mathbb{N}$ и

$Z_0(\rho) = C_0 \ln \rho + D_0$ при $k = 0$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, тогда из

асимптотического условия следует, что $C_k = 0$, а из краевого

условия следует, что и $D_k = 0$. Аналогично: $C_0 = 0, D_0 = 0$.

Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не с.з.

Пусть теперь $\lambda > 0$; сделаем замену независимой переменной:

$r = \rho\sqrt{\lambda}$. Имеем $Z_\rho = Z_r \frac{dr}{d\rho} = \sqrt{\lambda} Z_r$, $Z_{\rho\rho} = \lambda Z_{rr}$. Уравнение с

новой переменной r имеет вид

$$\frac{r^2}{\lambda} \lambda Z_{rr} + \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} Z_r + (r^2 - k^2) Z = 0 \Rightarrow$$

$r^2 Z_{rr} + r Z_r + (r^2 - k^2) Z = 0$ — уравнение Бесселя.

Общее решение

уравнения Бесселя

имеет вид

$$Z(r) = A J_k(r) + B Y_k(r),$$

где A, B — константы интегрирования, J_k —

функция Бесселя

первого рода порядка

k , Y_k — функция

Бесселя второго рода

порядка k . Свойства

функций Бесселя:



- 1) J_k — целая аналитическая функция, Y_k — мероморфная функция с единственным полюсом в нуле.
- 2) Для чётных k J_k — чётная функция, для нечётных k J_k — нечётная функция.
- 3) Действительные корни уравнения $J_k(r) = 0$ образуют счётное множество, симметричное относительно нуля, не имеющее конечных предельных точек, эти корни простые (кроме, может быть, нуля).

Обозначим $r_j^{(k)}$ — j -ый положительный нуль функции Бесселя первого рода порядка k , $k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$. Общее решение уравнения $\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) + (\lambda \rho^2 - k^2) Z(\rho) = 0$ имеет вид

$$Z(\rho) = AJ_k(\rho\sqrt{\lambda}) + BY_k(\rho\sqrt{\lambda}).$$

Из асимптотического условия задачи (13) следует, что $B = 0$, потому что функция Бесселя второго рода имеет полюс в нуле. Подстановка в краевое условие задачи (13) даёт

$$AJ_k(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow J_k(\sqrt{\lambda}) = 0. \text{ Итак,}$$

- $\lambda_{jk} = \left(r_j^{(k)}\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ — собственные значения 2D спектральной задачи (12);
- $u_{jk}(\rho, \theta) = J_k\left(r_j^{(k)}\rho\right) \cos(k\theta)$ — собственная функция, соответствующая с.з. λ_{jk} .

Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции.

Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

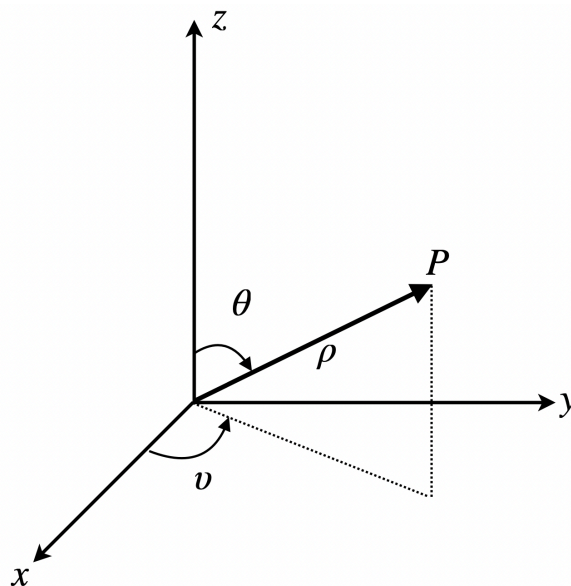
2. Сферические координаты

Выражение декартовых координат через сферические:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos v, \\ y = \rho \sin \theta \sin v, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Якобиан равен $\rho^2 \sin \theta$.

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид



$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Непосредственный вывод формулы (14) довольно сложен, поэтому обратимся к тензорному анализу и римановой геометрии.

Пусть $(M, \mathbf{g})$ — риманово многообразие, где M — гладкое многообразие размерности n , $\mathbf{g}$ — метрический тензор. В локальной карте $(x^1, \dots, x^n)$ метрический тензор задаётся компонентами g_{ij} или g^{ij} . Обозначим определитель матрицы $\left(g_{ij} \right)_{i,j=1}^n$ через g .

Оператор Лапласа—Бельтрами, действующий на скалярные поля или гладкие функции из $C^\infty(M)$, определяется как $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. Явная формула имеет вид



Eugenio Beltrami (1835–1900)

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} \nabla^j u \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right).$$

Упражнение: показать, что в сферических координатах матрица ковариантных компонент метрического тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \Rightarrow (g^{ij})_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\sqrt{g} = \rho^2 \sin \theta$. Получим оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Пример 1.6. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Получим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерном шаре

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = \varphi \end{cases}$$

разделением переменных в сферических координатах ρ, θ, φ .

Шаг 1. Найдём нетривиальные гармонические функции в разрезанном по отрезку между полюсами шаре. Имеем уравнение Лапласа в сферических координатах ($0 < \rho < 1$,

$0 < \theta < \pi, -\infty < v < +\infty$) и периодическое условие по долготе:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

$$U(\rho, \theta, v + 2\pi) \equiv U(\rho, \theta, v).$$

Будем искать нетривиальное решение этой специальной задачи в виде $U = Z(\rho)Y(\theta, v)$. Немедленно получаем периодическое условие для функции Y : $Y(\theta, v + 2\pi) \equiv Y(\theta, v)$.

Подстановка Фурье в уравнение Лапласа даёт

$$Z''(\rho)Y(\theta, v) + \frac{1}{\rho^2}Z(\rho)\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta}Z(\rho)\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} + \frac{2}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta, v) + \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta}Z(\rho)\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0;$$

$$\rho^2 \frac{Z''(\rho)}{Z(\rho)} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} + 2\rho \frac{Z'(\rho)}{Z(\rho)} + \frac{\cos \theta}{Y \sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0;$$

$$\rho^2 \frac{Z''(\rho)}{Z(\rho)} + 2\rho \frac{Z'(\rho)}{Z(\rho)} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - \frac{\cos \theta}{Y \sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda.$$

Так как ρ, θ, v — независимые переменные, то обе части последнего равенства — константа. Обозначим её через λ и рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda Y, \theta \in (0, \pi), v \in (-\infty, \infty),$$

$$Y(\theta, v + 2\pi) \equiv Y(\theta, v).$$

Не хватает асимптотических условий при $\theta \rightarrow +0, \theta \rightarrow \pi - 0$: $Y(\theta, v) = O(1)$ при $\theta \rightarrow +0$ и $\theta \rightarrow \pi - 0$.

Мы получили спектральную задачу для противоположного оператора Лапласа—Бельтрами на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda Y, \theta \in (0, \pi), v \in (-\infty, +\infty), \\ Y(\theta, v + 2\pi) \equiv Y(\theta, v), \\ Y(\theta) = O(1), \theta \rightarrow +0, \theta \rightarrow \pi - 0. \end{cases}$$

Решим эту задачу методом разделения переменных.

Положим $Y(\theta, v) = V(\theta)W(v)$. Подстановка в периодическое условие сразу даёт $W(v + 2\pi) \equiv W(v)$ — периодическое условие для функции W . Разделяем переменные θ, v в уравнении:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{VW}V''W - \frac{1}{VW\sin^2\theta}VW'' - \frac{\cos\theta}{VW\sin\theta}V'W = \lambda; \\ & -\frac{1}{V}V'' - \frac{1}{W\sin^2\theta}W'' - \frac{\cos\theta}{V\sin\theta}V' = \lambda \Bigg| \cdot \sin^2\theta; \\ & \mu = \text{const} = -\frac{W''}{W} = \sin^2\theta \frac{V''}{V} + \cos\theta \sin\theta \frac{V'}{V} + \lambda \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Имеем одномерную спектральную задачу:

$$\begin{cases} -W''(v) = \mu W(v), & -\infty < v < \infty, \\ W(v + 2\pi) \equiv W(v). \end{cases}$$

Её решение: $\mu_0 = 0 \Rightarrow W_0(v) = 1$; $\mu_k = k^2 \Rightarrow W_k^{(1)}(v) = \cos(kv)$, $W_k^{(2)}(v) = \sin(kv)$.

Относительно функции $V = V(\theta)$ имеем спектральную задачу вида

$$\begin{cases} \sin^2\theta \frac{V''}{V} + \cos\theta \sin\theta \frac{V'}{V} + \lambda \sin^2\theta = k^2, & 0 < \theta < \pi, \\ V(\theta) = O(1), & \theta \rightarrow +0, \theta \rightarrow \pi - 0. \end{cases} \quad (15)$$

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} & -V'' - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V' + \frac{k^2}{\sin^2\theta}V = \lambda V; \\ & V'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V' + \left(\lambda - \frac{k^2}{\sin^2\theta} \right) V = 0; \\ & \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{k^2}{\sin^2\theta} \right) V = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену: $\xi = \cos\theta$, $\theta = \arccos\xi$. Имеем

$$\bullet \quad \frac{dV}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dV}{d\xi};$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin \theta \frac{dV}{d\theta} &= -\sin^2 \theta \frac{dV}{d\xi} = -(1 - \xi^2) \frac{dV}{d\xi}; \\ \bullet \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) &= -\frac{-\sin \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dV}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dV}{d\xi} \right). \end{aligned}$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dV}{d\xi} \right) + \left(\lambda - \frac{k^2}{1 - \xi^2} \right) V = 0. \quad (16)$$

Факт из аналитической теории дифференциальных уравнений: уравнение (16) имеет нетривиальные решения без особенностей в точках $\xi = \pm 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_m = m(m + 1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Полиномы Лежандра: $P_m(\xi) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{d\xi^m} \left((\xi^2 - 1)^m \right)$ —

собственная функция, отвечающая с.з. $\lambda_m = m(m + 1)$ при $k = 0$. Полиномы Лежандра также получаются в процессе ортогонализации системы мономов $\{1, \xi, \xi^2, \xi^3, \dots\}$ в пространстве $L_2(-1, 1)$. Первые полиномы Лежандра:

$$P_0(\xi) = 1, P_1(\xi) = \xi, P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}, P_3(\xi) = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi.$$

Можно показать, что $(P_n, P_m)_{L_2(-1,1)} = \frac{2}{2m + 1} \delta_{nm}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ в уравнении (16). Тогда собственные функции, отвечающие с.з. $\lambda_m = m(m + 1)$, есть

$$V_{mk}(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{k}{2}} P_m^{(k)}(\xi), \quad (17)$$

где $k = 1, \dots, m$, $P_m^{(k)} = \frac{d^k P_m}{d\xi^k}$ — присоединённые полиномы

Лежандра. Функции (17) есть присоединённые функции Лежандра. Присоединённые функции также образуют ортогональный базис в $L_2(-1, 1)$, причём

$$(V_{nk}, V_{mk})_{L_2(-1,1)} = \frac{2}{2m + 1} \frac{(m + k)!}{(m - k)!} \delta_{nm}.$$

Итак, собственные значения и собственные функции противоположного оператора Лапласа—Бельтрами на сфере $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$:

- $\lambda_m = m(m+1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ — собственные значения;
- $Y_{mk}^{(1)} = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \cos kv$, $Y_{mk}^{(2)} = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \sin kv$ — сферические функции, образующие ортогональный базис в пространстве $L_2(\mathbb{S}^2)$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Чему равна кратность r_m m -го с.з.?

- $m = 0$, $\lambda_0 = 0$, $\{1\} \Rightarrow r_0 = 1$;
- $m = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\left\{ P_1 = \cos \theta, Y_{11}^{(1)} = \sin \theta \cos v, Y_{11}^{(2)} = \sin \theta \sin v \right\} \Rightarrow r_1 = 3$;

...

Общая формула: $r_m = 1 + 2m$.

Шаг 2.

Будем искать решение краевой задачи Дирихле в виде ряда Фурье по сферическим функциям:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} A_{m0}(\rho) P_m(\cos \theta) + \sum_{k=1}^m \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) (A_{mk}(\rho) \cos kv + B_{mk}(\rho) \sin kv) \right).$$

Разложим граничную функцию в ряд по сферическим функциям:

$$\varphi(\theta, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a_{m0} P_m(\cos \theta) + \sum_{k=1}^m \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) (a_{mk} \cos kv + b_{mk} \sin kv) \right),$$

где

$$a_{mk} = \frac{1}{\pi} \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \varphi(\theta, v) \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \cos kv \sin \theta d\theta,$$

$$b_{mk} = \frac{1}{\pi} \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \varphi(\theta, v) \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \sin kv \sin \theta d\theta,$$

$m = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, \dots, m$ — коэффициенты Фурье разложения граничной функции φ .

Условия на коэффициенты Фурье решения:

Уравнение для коэффициента B_{mk} аналогичное:

$$\rho^2 B_{mk}'' + 2\rho B_{mk}' - m(m+1)B_{mk} = 0.$$

Рассмотрим подстановку $A_{mk} = \rho^s$, где s — неизвестный показатель. Получим:

$$\rho^2 s(s-1)\rho^{s-2} + 2\rho s\rho^{s-1} - m(m+1)\rho^s = 0;$$

$$s^2 - s + 2s - m(m+1) = 0;$$

$$s^2 + s - m(m+1) = 0;$$

$s_1 = -m-1$, $s_2 = m$ — корни (по обратной теореме Виета).

Общее решение уравнения имеет вид

$$A_{mk}(\rho) = C_{mk}\rho^{-m-1} + D_{mk}\rho^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Из асимптотического условия следует, что $C_{mk} = 0$.

Подстановка в краевое условие даёт $a_{mk} = A_{mk}(1) = D_{mk}$.

Таким образом, $A_{mk}(\rho) = a_{mk}\rho^m$. Аналогично, имеем $B_{mk}(\rho) = b_{mk}\rho^m$. Ряд Фурье для решения задачи Дирихле имеет вид

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \left(\frac{1}{2} a_{m0} P_m(\cos \theta) + \sum_{k=1}^m \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) (a_{mk} \cos kv + b_{mk} \sin kv) \right).$$