

Пространства Соболева

Предлагается решить задачи качественного характера вокруг пространств Соболева и краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Кроме лекционных материалов, при решении задач рекомендуется пользоваться следующими источниками.

1. В.П. Михайлов. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976.
2. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. Т.Д. Вентцель, А.Ю. Горицкий, Т.О. Капустина и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2014.
4. В.С. Владимиров, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Adams, Robert A.; Fournier, John. Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics. 140 (2nd ed.). Boston, MA: Academic Press.

Номер варианта на единицу больше остатка от деления (PDE id — 1) на 31. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **11.05.24, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1. При каких α и β функция $u(x) = |x|^\alpha \cos \beta x$ принадлежит пространству $H_0^1(-1, 1)$? Ответ обосновать.

Вариант 2. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in C(\overline{\Omega})$ и существует такое $\rho_0 > 0$, что для всех $x \in \overline{\Omega}$ $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. Доказать, что форма $(u, v)' = \int_{\Omega} u(x)v(x)\rho(x)dx$ определяет скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, эквивалентное стандартному. Пространство Лебега с указанным скалярным произведением обозначается через $L_2(\Omega, \rho(x)dx)$.

Вариант 3. Пусть $H_0^1(0, \pi) = \{u \in H^1(0, \pi) : u(0) = u(\pi) = 0\}$. Доказать, что $u \in H_0^1(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |u_k|^2$, где u_k — коэффициенты Фурье разложения u по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Выразить через коэффициенты Фурье стандартную норму $\|u\|_{H_0^1(0, \pi)}$.

Вариант 4. Доказать, что для любой функции $u \in H^1(0, 2\pi)$ имеет место неравенство (одномерная версия неравенства Пуанкаре)

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leq 4 \int_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2.$$

Вариант 5. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. При каких α (в зависимости от n) функция $u(x) = |x|^{-\alpha} \sin |x|$ принадлежит пространству $H^1(B)$? Ответ обосновать.

Вариант 6. Пусть $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $D^+ = \{x \in D : x_2 > 0\}$, $D^- = \{x \in D : x_2 < 0\}$, $u \in C(\overline{D})$, $u|_{\overline{D}^+} \in C^1(\overline{D}^+)$ и $u|_{\overline{D}^-} \in C^1(\overline{D}^-)$. Доказать, что $u \in H^1(D)$.

Вариант 7. Обозначим через $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ подпространство пространства $H^1(0, 2\pi)$, состоящее из всех функций $u \in H^1(0, 2\pi)$, удовлетворяющих условию $u(0) = u(2\pi)$. Доказать следующее утверждение: функция $u \in \tilde{H}^1(0, 2\pi)$ тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$, где $a_k = \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx) dx$, $b_k = \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx) dx$, а формула $\|u\|_{\tilde{H}(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 1) (a_k^2 + b_k^2)$ определяет норму в $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$, эквивалентную стандартной.

Вариант 8. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$. Верно ли следующее утверждение: существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in C^\infty(\overline{B})$ $|u(0)| \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$? Ответ обосновать.

Вариант 9. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$. При каких значениях α функция $u(x) = |x|^{-\alpha} e^{x_1 - x_2}$ принадлежит пространству $H^1(B)$? Ответ обосновать.

Вариант 10. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, $u \in C^\infty(B \setminus \{0\}) \cap L_2(B)$. Можно ли утверждать, что $u \in H^1(B)$? Ответ обосновать.

Вариант 11. Одномерная теорема вложения Соболева утверждает, что $H^1(a, b) \subset C[a, b]$. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n \geq 2$. Обязана ли функция $u \in H^1(B)$ быть эквивалентной непрерывной функции $u \in C(\overline{B})$? Ответ обосновать.

Вариант 12. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \pi, x_2 > 0\}$, $u(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kx_2} \sin(kx_1)$. При каких a_k функция $u \in H^1(\Omega)$? Дать критерий, ответ обосновать.

Вариант 13. Пусть $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $u \in H^1(D)$, $u|_{\partial D} = \varphi$. Доказать, что существует такая не зависящая от u постоянная $C > 0$, что

$$\int_D |u(x)|^2 dx \leq C \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta)|^2 d\theta + \int_D |\nabla u(x)|^2 dx \right).$$

Вариант 14. Подпространство $H_0^1(\Omega)$ ($\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$) пространства Соболева $H^1(\Omega)$ можно определить двумя способами: 1) как замыкание пространства основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$; 2) как ядро оператора следа $\cdot|_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$. Строго доказать, что эти определения эквивалентны.

Вариант 15. Рассмотрим в $H^1(0, 2\pi)$ подпространство функций с нулевым средним:

$$\tilde{H}^1(0, 2\pi) = \left\{ u \in H^1(0, 2\pi) : \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0 \right\}.$$

Доказать, не применяя общую теорему об эквивалентной норме, что $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ — замкнутое в $H^1(0, 2\pi)$ подпространство, а форма $(u, v)'_{\tilde{H}^1(0, 2\pi)} = \int_0^{2\pi} u'(x)v'(x) dx$ есть скалярное произведение, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства $H^1(0, 2\pi)$.

Вариант 16. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $x^0 \in \bar{\Omega}$, $Q = \Omega \cap B_r(x^0)$. Доказать, что существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in H^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_Q |u(x)|^2 dx \right).$$

Вариант 17. Известно, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей класса C^1 существует такая константа $C = C(\Omega) > 0$, что для любой $u \in H_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство Фридрихса–Стеклова

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Справедливо ли неравенство Фридрихса–Стеклова в полосе $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < 1, -\infty < y < +\infty\}$? Ответ обосновать.

Вариант 18. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $u \in H^1(B)$. Возможно ли, что $u \notin L_{\infty}(B)$ при а) $n = 3$, б) $n = 2$, в) $n = 1$? Все ответы обосновать.

Вариант 19. Из одномерной теоремы вложения Соболева следует, что $H_0^1(0, 1) \subset C[0, 1]$. Верно ли, что всякая непрерывная функция $u \in C[0, 1]$, такая, что $u(0) = u(1) = 0$, принадлежит $H_0^1(0, 1)$? Ответ обосновать.

Вариант 20. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $x^0 \in \partial\Omega$, $U = \partial\Omega \cap B_r(x^0)$. Доказать, что существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in H^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_U |u(x)|^2 ds \right).$$

Вариант 21. Рассмотрим в пространстве $H_0^1(-1, 1)$ подпространство A гладких финитных функций φ , удовлетворяющих условию $\varphi'(0) + \alpha\varphi(0) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Найти коразмерность замыкания множества A в $H_0^1(-1, 1)$.

Вариант 22. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$. Доказать, что $u \in H_0^1(\Omega)$.

Вариант 23. Пусть $D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < x_n^2, x_n > 0\}$. Доказать, что для любой $C > 0$ найдутся такая область $\Omega \Subset D$ и такая функция $u \in H_0^1(\Omega)$, что

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx > C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Вариант 24. Построить пример ограниченной области Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$, для которой пространство всех гладких функций $C^\infty(\bar{\Omega})$ не составляет всюду плотного подпространства в $H^1(\Omega)$. Замечание: площадь границы области должна быть равна нулю.

Вариант 25. Показать, что ни для какой константы $C > 0$ неравенство Фридрихса–Стеклова

$$\int_0^\pi |u(x)|^2 dx \leq C \int_0^\pi |u'(x)|^2 dx$$

не может выполняться для всех $u \in H^1(0, \pi)$.

Вариант 26. Показать, что в $H^1(0, 2\pi)$ существует подпространство размерности 2, для которого неравенство Пуанкаре

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leq 4 \int_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2$$

превращается в равенство. Найти это подпространство и доказать, что для элементов из $H^1(0, 2\pi)$, не принадлежащих этому подпространству, неравенство Пуанкаре строгое.

Вариант 27. Обозначим через $\tilde{H}^1(0, 2\pi)$ подпространство пространства $H^1(0, 2\pi)$, состоящее из всех функций $u \in H^1(0, 2\pi)$, удовлетворяющих условию $u(0) = u(2\pi)$. Доказать, что для любой функции $u \in \tilde{H}^1(0, 2\pi)$, имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2.$$

Вариант 28. Принимая во внимание одномерную версию неравенства Пуанкаре

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leq 4 \int_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2,$$

где $u \in H^1(0, 2\pi)$, доказать, что форма $(u, v)' = \int_0^{2\pi} u'v' dx + \int_0^{2\pi} u dx \cdot \int_0^{2\pi} v dx$ есть скалярное произведение, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства $H^1(0, 2\pi)$.

Вариант 29. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Показать, что

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\}$$

есть замкнутое подпространство в $H^1(\Omega)$, а форма $(u, v)' = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ есть скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной.

Вариант 30. Пусть $\lambda_k(\Omega)$, $\lambda_k(Q)$ — k -ые, упорядоченные по возрастанию собственные значения (противоположного) оператора Лапласа в областях Ω , Q , $\Omega \in Q \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega, \partial Q \in C^1$. Доказать, что $\lambda_k(\Omega) < \lambda_k(Q)$ при всех k .

Вариант 31. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$. При каких α и ω функция $u(x) = (|x| \sin \omega |x|)^{\alpha}$ принадлежит пространству $H^1(B)$? Ответ обосновать.