

Метод разделения переменных для краевых задач

Постановка для нечётных вариантов. Рассматривается краевая задача для уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в квадрате $(0, \pi) \times (0, \pi)$ с условиями Дирихле / Неймана / Робена на границе (любой их комбинацией). Граничные функции предполагаются квадратично интегрируемыми. Требуется решать краевую задачу методом Фурье, а именно:

- разделить переменные и получить задачу Штурма–Лиувилля;
- решить задачу Штурма–Лиувилля, т.е. найти её собственные значения и собственные функции;
- представить решение краевой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, разложить в ряды Фурье граничные функции;
- получить и решить краевые задачи для коэффициентов Фурье;
- из ряда Фурье для решения краевой задачи получить интегральное представление, выписать выражения для интегральных ядер в виде рядов.

Постановка для чётных вариантов. Пусть ρ, θ — полярные координаты. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

в одной из следующих областей: круг, кольцо, полукруг или сектор круга. Граничная функция предполагается квадратично интегрируемой. Требуется найти интегральное представление решения краевой задачи, выполнив разделение переменных в полярных координатах. Для этого:

- разделить переменные, получить и решить спектральную задачу (задачу Штурма–Лиувилля);
- представить решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, предварительно разложив в аналогичный ряд правую часть краевого условия;
- подставить этот ряд в краевую задачу и получить краевые задачи относительно коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье) (краевые задачи в круге или секторе круга дополняются асимптотическим условием при $\rho \rightarrow 0$, которое обеспечивает единственность решения);
- решить краевые задачи и найти коэффициенты Фурье;
- получить формулу интегрального представления решения краевой задачи и просуммировать (по возможности) интегральное ядро.

Ресурсы для решения инд. задания #1

1. Материалы практической темы #1 «Метод разделения переменных для краевых задач»: [первая](#) часть, [вторая](#) часть.
2. Примеры решения задания: [для нечётных вариантов](#), [для чётных вариантов](#).
3. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.

4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд., стереотипное. М.: МЦНМО, 2004.
5. Комеч А.И. Практические решения уравнений математической физики. Механико-математический факультет МГУ, 1993. http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf

Номер варианта студента/студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 20**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **13.04.24, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u _{x=0} = \alpha(y), u_x _{x=\pi} = \beta(y), \\ u _{y=0} = 0, u _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 2. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u _{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u _{\theta=0} = 0, u _{\theta=\pi} = 0. \end{cases}$
Вариант 3. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u _{x=0} = 0, u_x + u _{x=\pi} = 0, \\ u _{y=0} = \varphi(x), u _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 4. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u _{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ -u_\theta _{\theta=0} = 0, u_\theta _{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$
Вариант 5. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u _{x=0} = 0, u _{x=\pi} = 0, \\ u _{y=0} = \varphi(x), u _{y=\pi} = \psi(x). \end{cases}$	Вариант 6. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \\ u _{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u _{\theta=0} = 0, u _{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0. \end{cases}$
Вариант 7. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u _{x=0} = 0, u_x _{x=\pi} = 0, \\ u _{y=0} = \varphi(x), u_y + u _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 8. $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < \rho < 2, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u _{\rho=1} = 0, u _{\rho=2} = \varphi(\theta). \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ -u_x \Big _{x=0} = 0, u_x \Big _{x=\pi} = 0, \\ -u_y \Big _{y=0} = \varphi(x), u \Big _{y=\pi} = \psi(x). \end{cases}$	Вариант 10. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u_\rho \Big _{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u \Big _{\theta=0} = 0, u \Big _{\theta=\pi} = 0. \end{cases}$
Вариант 11. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u_x - u \Big _{x=0} = 0, u \Big _{x=\pi} = 0, \\ -u_y \Big _{y=0} = \varphi(x), u_y \Big _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 12. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u \Big _{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u \Big _{\theta=0} = 0, u_\theta \Big _{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$
Вариант 13. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u \Big _{x=0} = \alpha(y), u \Big _{x=\pi} = \beta(y), \\ -u_y \Big _{y=0} = 0, u_y \Big _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 14. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \\ u_\rho \Big _{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ -u_\theta \Big _{\theta=0} = 0, u \Big _{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0. \end{cases}$
Вариант 15. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ -u_x \Big _{x=0} = \alpha(y), u_x + u \Big _{x=\pi} = 0, \\ u \Big _{y=0} = 0, u + u_y \Big _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 16. $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < \rho < 2, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u \Big _{\rho=1} = 0, u_\rho \Big _{\rho=2} = \varphi(\theta). \end{cases}$
Вариант 17. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u_x - u \Big _{x=0} = 0, u_x \Big _{x=\pi} = \beta(y), \\ u \Big _{y=0} = 0, u_y \Big _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 18. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u_\rho + u \Big _{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$
Вариант 19. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ -u_x \Big _{x=0} = 0, u \Big _{x=\pi} = 0, \\ -u_y + u \Big _{y=0} = \varphi(x), u \Big _{y=\pi} = 0. \end{cases}$	Вариант 20. $\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u_\rho \Big _{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$