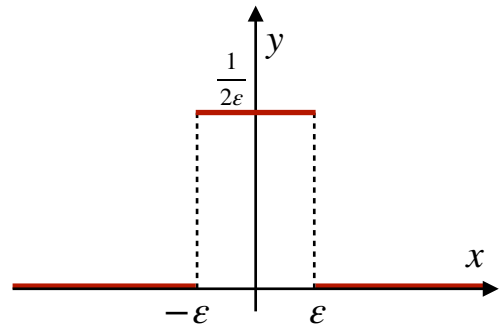


Операции над обобщёнными функциями

Задача 5.1. Исследовать сходимость семейства обобщённых функций в пространстве $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$a) f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ 0, & x \notin (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$



Вспомним определение сходимости в $\mathcal{D}'$:

$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon = f \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) f_\varepsilon(\varphi) =: (f_\varepsilon, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) := f(\varphi)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Имеем

$$(f_\varepsilon, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x) dx.$$

По теореме о среднем для интеграла:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(\xi_\varepsilon) 2\varepsilon = \varphi(\xi_\varepsilon), \text{ где } -\varepsilon \leq \xi_\varepsilon \leq \varepsilon. \text{ Пусть}$$

$\varepsilon \rightarrow +0$, тогда $\xi_\varepsilon \rightarrow 0$. Но φ — непрерывная функция, поэтому $\varphi(\xi_\varepsilon) \rightarrow \varphi(0)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Итак,

$$(f_\varepsilon, \varphi) \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Ответ: $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon = \delta$ в $\mathcal{D}'$.

$$б) f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}. \text{ Имеем } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$(f_\varepsilon, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \varphi(x) dx = \{x = \varepsilon t, dx = \varepsilon dt\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t^2 + 1)} \varphi(\varepsilon t) dt. \text{ Рассмотрим оценку:}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t^2 + 1)} \varphi(\varepsilon t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t^2 + 1)} |\varphi(\varepsilon t)| dt \leq$$

$$\leq C_{\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\pi(t^2 + 1)} < \infty.$$

Интеграл сходится равномерно и абсолютно по ε (в силу признака сравнения), если φ — непрерывная и ограниченная на прямой функция. Тогда возможен предельный переход:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t^2 + 1)} \varphi(\varepsilon t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi(t^2 + 1)} \varphi(\varepsilon t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t^2 + 1)} \varphi(0) dt = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Ответ: $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_{\varepsilon} = \delta.$

Задача 5.2. Найти производные обобщённых функций.

а) $\theta'(-x) = \chi'(-x) = ?$ Из определения функции Хевисайда следует, что

$$\theta(-x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

По определению производных обобщённых функций,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (\theta'(-x), \varphi(x)) := -(\theta(-x), \varphi'(x)) =$$

$$= - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = \{\text{supp } \varphi \subset (a, \infty)\} = - \int_{\min(a, 0)}^0 \varphi'(x) dx = -\varphi(0) =$$

$$= (-\delta, \varphi). \text{ Таким образом, } \theta'(-x) = -\delta(x). \text{ Альтернативный}$$

вывод: $\theta'(-x) = \delta(-x)(-1) = -\delta(-x) = -\delta(x).$ Здесь используется производная композиции и тот факт, что

производная функции Хевисайда равна δ , а дельта-функция чётная: $(\delta(-x), \varphi(x)) := (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{sign}(x) &= \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0; \end{cases} \quad (\operatorname{sign} x)' = ? \text{ Имеем } (\operatorname{sign} x)' = \\ &= (2\theta(x) - 1)' = 2\theta'(x) - 1' = 2\delta(x). \text{ Отсюда, кстати,} \\ &(\operatorname{sign} x)^{(m)} = 2\delta^{(m-1)}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } |x|' &= (x \operatorname{sign} x)' = x' \operatorname{sign} x + x \operatorname{sign}' x = \operatorname{sign} x + 2x\delta(x) = \\ &= \operatorname{sign} x, \text{ т.к. } (2x\delta(x), \varphi(x)) := (\delta(x), 2x\varphi(x)) = 2 \cdot 0 \cdot \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{г) } (\cos x \theta(x))' = \cos' x \theta(x) + \cos x \theta'(x) = -\theta(x) \sin x + \delta(x).$$

$$\begin{aligned} \text{д) } (\ln |x|)' &= ? \quad (\ln |x|)' = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x} \text{ — классическая} \\ &\text{производная. Однако, хотя } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\ln |x|| dx < \infty, \text{ но} \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{1}{x} \right| dx &= \infty \Rightarrow \ln |x| \in L_{1,loc}(\mathbb{R}), \quad (\ln |x|)' \notin L_{1,loc}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$$\text{По определению } (\ln |x|, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \ln |x| dx;$$

$$\begin{aligned} (\ln |x|', \varphi(x)) &:= -(\ln |x|, \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \ln |x| dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \varphi'(x) \ln |x| dx = \{ \operatorname{supp} \varphi \subset (a, b), a > 0, b < 0 \} = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln(-x) dx + \int_{\varepsilon}^b \varphi'(x) \ln x dx \right) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) \ln \varepsilon + \end{aligned}$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)dx}{x} + \int_{\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)dx}{x} \right) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x} =: \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right).$$

Ответ: $(\ln|x|)' = \mathcal{P} \frac{1}{x}$, $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ — главная часть функции $\frac{1}{x}$.

Задача 5.3. Доказать, что $\forall m \in \mathbb{N}$ о.ф. $\delta, \delta', \dots, \delta^{(m)}$ линейно независимы как элементы линейного пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Решение. Предположим, что $C_0\delta + C_1\delta' + \dots + C_m\delta^{(m)} = 0$.

Тогда $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$0 = (C_0\delta + C_1\delta' + \dots + C_m\delta^{(m)}, \varphi) = (\delta, C_0\varphi - C_1\varphi' + \dots + (-1)^m C_m\varphi^{(m)}) = \\ = C_0\varphi(0) - C_1\varphi'(0) + \dots + (-1)^m C_m\varphi^{(m)}(0) \Rightarrow C_m = 0, \text{ если } \varphi^{(m)}(0) \neq 0, \text{ а } \varphi^{(k)}(0) = 0 \text{ для всех } k < m. \text{ Аналогично можно показать, что}$$

$$C_0 = -C_1 = \dots = (-1)^{m-1}C_{m-1} = 0.$$

Задача 5.4. Доказать, что $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$.

Решение. Имеем по определению

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi), \varphi \right) := \sum_{k: 2k\pi \in \text{supp } \varphi} \varphi(2k\pi). \text{ С другой}$$

стороны, можно показать, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \delta(x - 2k\pi). \text{ Нужно доказать, что}$$

для любой $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}, \varphi \right) = \sum_{k: 2k\pi \in \text{supp } \varphi} \varphi(2k\pi).$$

Рассмотрим предел симметрических сумм:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \text{ при } N \rightarrow \infty \text{ в } \mathcal{D}' \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx}, \varphi \right) \rightarrow \sum_{k: 2k\pi \in \text{supp } \varphi} \varphi(2k\pi) \text{ при } N \rightarrow \infty, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ имеем } \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(x) dx \rightarrow \sum_{k: 2k\pi \in \text{supp } \varphi} \varphi(2k\pi)$$

при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$, $0 \leq x < 2\pi$,

и периодически продолжим её на всю действительную ось:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi} \right] \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} + \left[\frac{x}{2\pi} \right], x \in \mathbb{R}.$$

Производная этой функции

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$$

(покажите самостоятельно).

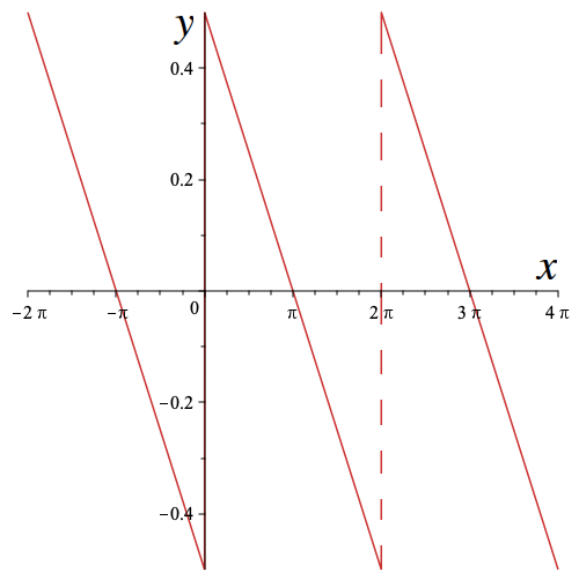
Утверждение. Пусть f — кусочно-гладкая функция на прямой, т.е. гладкая функция на каждом интервале (a_k, a_{k+1}) , $k \in \mathbb{Z}$, $\sqcup_{k \in \mathbb{Z}} (a_k, a_{k+1}) = \mathbb{R} \setminus \{a_k : k \in \mathbb{Z}\}$; существуют односторонние пределы функции и односторонние производные в a_k ; $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ не имеет конечных предельных точек. Тогда

$$f'(x) = g(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\lim_{x \rightarrow a_k+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_k-0} f(x) \right) \delta(x - a_k), \text{ где } g \text{ —}$$

классическая производная.

Разложим функцию в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$



где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$. Однако,

лучше работать с рядом Фурье в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где $c_k = \frac{(f, e^{ikx})}{\|e^{ikx}\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$, причём $\bar{c}_k = c_{-k}$,

$$\|e^{ikx}\|^2 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi. \text{ Напомню, что в комплексном}$$

гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ эрмитово скалярное произведение задаётся формулой

$$(f, g)_{L_2(0, 2\pi)} := \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx; (g, f) = \overline{(f, g)}.$$

Получим коэффициенты Фурье. Пусть $k \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) \frac{de^{-ikx}}{-ik} = \\ &= -\frac{1}{2\pi ik} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{4\pi ik} + \frac{1}{4\pi ik} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi ik}. \text{ Легко видеть, что} \end{aligned}$$

$$c_0 = 0.$$

Ряд Фурье для функции f сильно сходится в пространстве Лебега, но из сильной сходимости (относительно нормы) в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ следует слабая сходимость в $L_2(0, 2\pi)$, а

из неё (с учётом теоремы Лебега) уже следует сходимость в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} + \left[\frac{x}{2\pi} \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{2\pi ik} \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Но тогда в силу непрерывности оператора дифференцирования

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{2\pi ik} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{ikx}}{2\pi ik} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} e^{ikx} = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi), \text{ что и} \end{aligned}$$

требовалось.

Задача 5.5. Решить уравнения в пространстве обобщённых функций.

а) $x(x-1)y = 0$. Легко угадать два нетривиальных частных решения: $y_1 = \delta(x)$, $y_2 = \delta(x-1)$. В силу линейности уравнения комбинация $y = C_1\delta(x) + C_2\delta(x-1)$ также будет решением при любых C_1 и C_2 . Но исчерпывает ли все решения уравнения эта формула?

Пусть $xy = 0$, $y \in \mathcal{D}'$. Докажем, что $y = C\delta(x)$. Для этого рассмотрим основную функцию $\eta = I_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]} * \omega_r$, $r < \varepsilon$, где ω_r — ядро усреднения радиуса $r > 0$, $I_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]}$ — индикаторная функция отрезка $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Функция $\eta(x) \equiv 1$ в $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\eta(x) \equiv 0$ вне $[-3\varepsilon, 3\varepsilon]$. Имеем

$$(y, x\varphi) = 0 \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{D}. \quad (*)$$

Для произвольной $\psi \in \mathcal{D}$ рассмотрим цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} (y, \psi) &= (y(x), \psi(0)\eta(x) + \psi(x) - \psi(0)\eta(x)) = \\ &= \psi(0)(y(x), \eta(x)) + \left(y(x), x \frac{\psi(x) - \psi(0)\eta(x)}{x} \right) = C\psi(0) + (y(x), x\varphi(x)), \end{aligned}$$

где $C = (y(x), \eta(x))$, $\varphi(x) = \frac{\psi(x) - \psi(0)\eta(x)}{x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (покажите

самостоятельно). Принимая во внимание (*), имеем для $\forall \psi \in \mathcal{D}$ $(y, \psi) = C\psi(0)$, т.е. $y = C\delta(x)$.

По аналогии можно показать, что для любой $x_0 \in \mathbb{R}$ общее решение уравнения $(x - x_0)y = 0$ в пространстве $\mathcal{D}'$ есть $y = C\delta(x - x_0)$.

Из $x(x - 1)y = 0$ заключаем, что $(x - 1)y = \tilde{C}_1\delta(x)$ — линейное неоднородное уравнение относительно y . Общее решение однородного уравнения $(x - 1)y_0 = 0$ есть $y_0 = C_2\delta(x - 1)$. Осталось только найти частное решение неоднородного уравнения. Нетрудно видеть, что оно имеет вид $y_1 = -\tilde{C}_1\delta(x)$: $(-x + 1)\tilde{C}_1\delta(x) = \tilde{C}_1\delta(x)$. Таким образом, общее решение уравнения $x(x - 1)y = 0$ есть $y = -\tilde{C}_1\delta(x) + C_2\delta(x - 1) = C_1\delta(x) + C_2\delta(x - 1)$.

б) $x^2y' = 1$. Пусть $xy' = z$, тогда $xz = 1$ — линейное неоднородное уравнение относительно z .

Однородное уравнение: $xz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = C_1\delta(x)$;

частное решение неоднородного уравнения: $z_1 = \mathcal{P}\frac{1}{x}$

(проверяется подстановкой). Итак, $z = z_0 + z_1 = C_1\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy' = C_1\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$ — линейное неоднородное уравнение

уже относительно y .

Однородное уравнение: $xy'_0 = 0$. Пусть $y'_0 = u$, тогда $xu = 0 \Rightarrow u = C_2\delta(x) \Rightarrow y'_0 = C_2\delta(x) \Rightarrow y_0 = C_2\theta(x) + C_3$.

Утверждение. ЛОДУ с постоянными коэффициентами в $\mathcal{D}' \Leftrightarrow$ ЛОДУ с постоянными коэффициентами в C^∞ .

- Неоднородное уравнение $xy'_1 = C_1\delta(x)$. Попробуем найти частное решение. Заметим, что $C_1\varphi(0) = (xy'_1, \varphi) = (y'_1, x\varphi) = -(y_1, x\varphi' + \varphi) = -(y_1, x\varphi') - (y_1, \varphi) \Rightarrow y_1 = -C_1\delta(x)$.

Замечание. Отметим, что $\delta + x\delta' = 0$, т.е. дельта-функция и её производные зависимы в $\mathcal{D}'$ — модуле над кольцом C^∞ .

- Неоднородное уравнение $xy'_2 = \mathcal{P}\frac{1}{x}$. Если $x \neq 0$, то $y'_2 = \frac{1}{x^2}$
 $\Leftrightarrow y_2 = -\frac{1}{x}$. Но тогда $y_2 = -\mathcal{P}\frac{1}{x}$ — частное решение
 (проверяется подстановкой).

Ответ: $y = C_2\theta(x) + C_3 - C_1\delta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Задача 5.6. Найти свёртки обобщённых функций.

а) $\theta(x) * \theta(x)x^2 = ?$ Вспомним определение свёртки

регулярных функций: $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$. Имеем

$$\begin{aligned}\theta(x) * \theta(x)x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)\theta(x-y)(x-y)^2dy = \theta(x)x^2 * \theta(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)y^2\theta(x-y)dy = \int_0^{\infty} y^2\theta(x-y)dy = \begin{cases} x \leq 0 : 0, \\ x > 0 : \int_0^x y^2dy = \frac{1}{3}x^3 = \\ = \frac{x^3}{3}\theta(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, $\theta(x) * \theta(x)x^2 = \frac{x^3}{3}\theta(x)$. Обе функции

принадлежали свёрточной алгебре

$$\mathcal{D}'_+ = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \text{supp } f \text{ ограничен снизу}\}.$$

б) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = ?$ Вспомним три свойства свёртки:

- нейтральный элемент: $\delta * f = f * \delta = f$;
- дифференцирование свёртки:

$$\begin{aligned}(D^\alpha f) * g &= D^\alpha(f * g) \Leftrightarrow \\ (D^\alpha \delta * f) * g &= D^\alpha \delta * (f * g) = D^\alpha \delta * f * g;\end{aligned}$$

- сдвиг свёртки: $f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h)$.

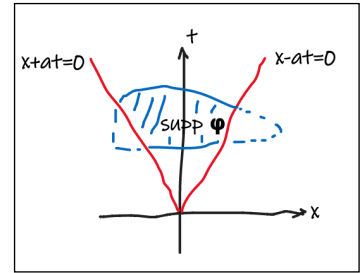
$$\begin{aligned}\text{Имеем тогда } \delta^{(m)}(x-a) * f(x) &= (\delta(x-a) * f(x))^{(m)} = \\ &= (\delta * f)^{(m)}(x-a) = f^{(m)}(x-a).\end{aligned}$$

в) Пусть $a > 0$ — параметр; найдём

свёртку $\frac{1}{2a}\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial t}(\theta(t) \otimes \delta(x))$. Имеем

$$\begin{aligned}\theta(at - |x|) * \frac{\partial}{\partial t}(\theta(t) \otimes \delta(x)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\theta(at - |x|) * (\theta(t) \otimes \delta(x))) = \\ &= \theta(at - |x|) * (\delta(t) \otimes \delta(x)) = \theta(at - |x|) * \delta(x, t) = \\ &= \theta(at - |x|) * \delta(x, t) = \theta(at - |x|), \text{ где}\end{aligned}$$

$$(\theta(at - |x|), \varphi(x, t)) = \iint_{at - |x| \geq 0} \varphi(x, t) dx dt.$$



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \delta(x), u_t|_{t=0} = 0; \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(|x| - at).$$

г) $e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = ?$

Найти свёртку ‘неформально’:

$$\begin{aligned}e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta(\tau)}{2a\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 \tau}} e^{x-\xi} \delta(t-\tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\tau)}{2a\sqrt{\pi \tau}} \delta(t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 \tau} + x - \xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi \tau}} \delta(t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 \tau} + x - \xi} d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi \tau}} \delta(t-\tau) \exp(x + a^2 \tau) 2a\sqrt{\pi \tau} d\tau = \\ &= \theta(t) \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) \exp(x + a^2 \tau) d\tau = \theta(t) (\delta(t-\tau), \exp(x + a^2 \tau)) = \theta(t) e^{x+a^2 t}.\end{aligned}$$

Найдём интеграл:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2\tau} + x - \xi} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4a^2\tau}(\xi^2 + 4a^2\tau\xi + 4a^4\tau^2) + x + a^2\tau\right) d\xi = \\
&= \exp(x + a^2\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4a^2\tau}(\xi + 2a^2\tau)^2\right) d\xi = \\
&= \left\{ \eta = \frac{\xi + 2a^2\tau}{2a\sqrt{\tau}}, d\xi = 2a\sqrt{\tau}d\eta \right\} = \\
&= \exp(x + a^2\tau) 2a\sqrt{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \exp(x + a^2\tau) 2a\sqrt{\pi\tau}.
\end{aligned}$$

Воздержавшись от строгого вычисления свёртки, покажем, каким образом данный результат связан с оператором

теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и задачей Коши для уравнения

теплопроводности. Его фундаментальное решение есть

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \quad (\text{вывод в лекционной теме 6 'Теория}$$

обобщённых функций'). Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = e^x. \end{cases}$$

Она эквивалентна уравнению в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \delta(t),$$

где $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } u \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$. Это свёрточное

уравнение, а мы уже знаем, что его решение даётся формулой

$u(x, t) = E(x, t) * e^x \delta(t)$ или формулой Пуассона

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} e^{\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} e^{x-\xi} d\xi.$$

д) $\delta_{S_R} * |x|^2 = ?$ в $\mathbb{R}^n$, где $n = 3$ (размерность пространства).

Напомню определение простого слоя δ_{S_R} единичной плотности на сфере $S_R = \{ |x| = R \}$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (\delta_{S_R}, \varphi) = \iint_{|x|=R} \varphi(x) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \varphi(x) R^2 \sin \psi d\psi.$$

Очевидно, что $\text{supp } \delta_{S_R} = S_R$.

Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, g — финитная функция, тогда свёртку $g * f$ можно найти по формуле

$$(g * f, \varphi) = (f(x) \otimes g(y), \eta(y) \varphi(x + y)),$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, η — некоторая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равная 1 в окрестности носителя g .

Положим $\eta(y) = 1$, если $|y| = R$, $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Пользуясь этой формулой, будем иметь

$$\begin{aligned} (|x|^2 * \delta_{S_R}, \varphi) &= (|x|^2 \otimes \delta_{S_R}(y), \eta(y) \varphi(x + y)) = \\ &= (1(x) \otimes \delta_{S_R}(y), \eta(y) |x|^2 \varphi(x + y)) = \left(1(x), (\delta_{S_R}(y), \eta(y) |x|^2 \varphi(x + y)) \right) = \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} dx \iint_{|y|=R} |x|^2 \varphi(x + y) d\sigma_y = \iint_{|y|=R} d\sigma_y \iiint_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \varphi(x + y) dx = \\ &= \{ \xi = x + y, d\xi = dx, x = \xi - y \} = \\ &= \iint_{|y|=R} d\sigma_y \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) |\xi - y|^2 d\xi = \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) d\xi \iint_{|y|=R} |\xi - y|^2 d\sigma_y. \end{aligned}$$

Отдельно вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{|y|=R} |\xi - y|^2 d\sigma_y &= \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi (|\xi|^2 + R^2 - 2|\xi||y|\cos\psi) R^2 \sin\psi d\psi = \\ &= 4\pi R^2 (|\xi|^2 + R^2), \text{ поскольку} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} -2|\xi||y| \cos \psi R^2 \sin \psi d\psi = 0.$$

Следовательно, $\delta_{S_R} * |x|^2 = 4\pi R^2 \left(|x|^2 + R^2 \right)$.

Задача 5.7. Найти преобразование Фурье обобщённых функций.

а) $\mathcal{F} \left[\frac{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)}{2} \right] = ?$ Вспомним свойство

преобразование Фурье сдвига:

$$\mathcal{F} [f(x - x^0)](\xi) = e^{i(\xi, x^0)} \mathcal{F}[f](\xi).$$
 Кроме того,

$$(\mathcal{F}[\delta], \varphi) = (\delta, \mathcal{F}[\varphi]) = \left(\delta(\xi), \int \varphi(x) e^{ix\xi} dx \right) = \int \varphi(x) dx \Rightarrow \mathcal{F}[\delta] = 1.$$

Преобразование Фурье финитной обобщённой функции: пусть $f \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ и представляется в виде

$$\mathcal{F}[f](\xi) = (f(x), \eta(x) e^{-i(\xi, x)}),$$

где $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta(x) = 1$, если $x \in U(\text{supp } f)$ (окрестности носителя). В частности,

$$\mathcal{F}[\delta](\xi) = (\delta(x), \eta(x) e^{-i(\xi, x)}) = \eta(0) = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)}{2} \right] &= \frac{1}{2} \mathcal{F} [\delta(x - x_0)] + \frac{1}{2} \mathcal{F} [\delta(x + x_0)] = \\ &= \frac{1}{2} e^{ix_0\xi} \hat{\delta}(\xi) + \frac{1}{2} e^{-ix_0\xi} \hat{\delta}(\xi) = \hat{\delta}(\xi) \cos x_0\xi = \cos x_0\xi. \end{aligned}$$

б) Чему равно преобразование Фурье тождественной единицы в $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{F}[1] = ?$ в $\mathbb{R}^n$. $1 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, но $1 \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ ($p < \infty$) $\Rightarrow \mathcal{F}[1]$ — сингулярная обобщённая функция. Определение

обратного преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[f(-\xi)](x). \text{ Отсюда } \mathcal{F}[\delta] = 1 \Rightarrow$$

$$\delta = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[1] \Rightarrow \mathcal{F}[1](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi).$$

в) Пусть $a > 0$ — параметр. $\mathcal{F} [\theta(x)e^{-ax}] = ?$

$$\mathcal{F} [\theta(-x)e^{ax}] = ? \quad \mathcal{F} [e^{-a|x|}] = ? \quad \theta(x)e^{-ax} \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\theta(x)e^{-ax}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{-ax} e^{ix\xi} dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{ix\xi} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{ix\xi} dx = \int_0^{\infty} e^{(i\xi-a)x} dx = \frac{e^{(i\xi-a)x}}{i\xi-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-i\xi}. \end{aligned}$$

Используя свойство преобразования Фурье гомотетии

$$\mathcal{F} [f(cx)] = \frac{1}{|c|^n} \mathcal{F}[f] \left(\frac{\xi}{c} \right), \text{ где } 0 \neq c = \text{const, получим}$$

$$\mathcal{F} [\theta(-x)e^{ax}] = \frac{1}{|-1|} \frac{1}{a-i(-\xi)} = \frac{1}{a+i\xi}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [e^{-a|x|}] &= \mathcal{F} [\theta(x)e^{-ax} + \theta(-x)e^{ax}] = \\ &= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$

г) $\theta \in L_{\infty}(\mathbb{R})$, но $\theta \notin L_p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) $\Rightarrow \mathcal{F}[\theta]$ —

сингулярная обобщённая функция — найдём её. Определение ничего не даёт:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}[\theta], \varphi) &= (\theta, \mathcal{F}[\varphi]) = \left(\theta(\xi), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ix\xi} dx \right) = \\ &= \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ix\xi} dx = \dots \text{ Однако, } \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ —} \end{aligned}$$

линейный топологический изоморфизм, поэтому

$\mathcal{F}[\theta(x)](\xi) = \mathcal{F} \left[\lim_{a \rightarrow +0} \theta(x) e^{-ax} \right](\xi) = \lim_{a \rightarrow +0} \mathcal{F} [\theta(x) e^{-ax}](\xi) =$
 $= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a - i\xi} = \frac{1}{0 - i\xi}$. Ошибочно думать, что предел равен $i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$, на самом деле всё сложнее:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{0 - i\xi} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{-i(\xi + ia)} = i \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\xi + ia} = i \left(-i\pi\delta(\xi) + \mathcal{P}\frac{1}{\xi} \right) = \\
 &= \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}. \text{ Итак, } \mathcal{F}[\theta](\xi) = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}. \text{ Мы}
 \end{aligned}$$

применили *формулы Сохоцкого*

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm iy} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Задача 5.8. Найти фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами.

$$\mathcal{L} = \frac{d^m}{dx^m} + c_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + c_m.$$

Решение. По определению $\mathcal{L}\delta * E = \mathcal{L}E = \delta$. Если при этом $E \in \mathcal{S}'[0, +\infty)$, то есть $\text{supp } E \subset [0, +\infty)$, то фундаментальное решение будем единственным.

Действительно, тогда уравнение $\mathcal{L}E = \delta$ рассматривается в свёрточной алгебре $\mathcal{S}'[0, +\infty)$, а в каждой свёрточной алгебре фундаментальное решение свёрточного оператора единственно.

Явная формула: $E(x) = X(x)\theta(x)$, где X есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}X = 0, \\ X(0) = 0, X'(0) = 0, \dots, X^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Пример. Пусть $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a^2$, $a > 0$, тогда для X имеем задачу Коши вида

$$\begin{cases} X'' + a^2 X = 0, \\ X(0) = 0, X'(0) = 1. \end{cases}$$

$X(x) = A \cos ax + B \sin ax$ — общее решение уравнение.

Подстановка в первое начальное условие даёт

$A \cos 0 + B \sin 0 = 0 \Rightarrow A = 0$. Тогда из второго начального условия получаем $aB \cos 0 = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{a}$. Отсюда

$X(x) = \frac{1}{a} \sin ax \Rightarrow E(x) = \theta(x) \frac{\sin ax}{a}$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}$ в алгебре $\mathcal{S}'[0, +\infty)$.

Найдём это фундаментальное решение через преобразование Фурье:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + a^2 E = \delta(x) \Rightarrow \mathcal{F} \left[\frac{d^2 E}{dx^2} + a^2 E \right] = \mathcal{F} [\delta(x)] = 1.$$

Обозначим $\hat{E} = \mathcal{F}[E]$ — фурье-образ фундаменталки, получим уравнение для $\hat{E}$:

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^2 E}{dx^2} \right] + a^2 \hat{E} = 1 \Rightarrow (-i\xi)^2 \hat{E} + a^2 \hat{E} = 1 \Rightarrow (-\xi^2 + a^2) \hat{E} = 1. \text{ Получили линейное неоднородное уравнение для } \hat{E}, \text{ теперь решим его.}$$

• Однородное уравнение $(-\xi^2 + a^2) \hat{E}_0 = 0 \Leftrightarrow (a - \xi)(a + \xi) \hat{E}_0 = 0$. Его общее решение имеет вид $\hat{E}_0 = C_1 \delta(\xi - a) + C_2 \delta(\xi + a)$ (см. задачу 5.5а)).

• Имеем $\hat{E}_1 = \frac{1}{a^2 - \xi^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a - \xi} + \frac{1}{a + \xi} \right)$, если

$\xi \notin \{a, -a\}$. На всей прямой будет

$$\hat{E}_1 = \frac{1}{2a} \mathcal{P} \frac{1}{a - \xi} + \frac{1}{2a} \mathcal{P} \frac{1}{a + \xi}.$$

Таким образом, общее решение уравнения $(-\xi^2 + a^2) \hat{E} = 1$ имеет вид

$$\hat{E} = \hat{E}_0 + \hat{E}_1 = C_1 \delta(\xi - a) + \frac{1}{2a} \mathcal{P} \frac{1}{a - \xi} + C_2 \delta(\xi + a) + \frac{1}{2a} \mathcal{P} \frac{1}{a + \xi}.$$

Вспомним о формуле Сохоцкого:

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm iy} = \frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}, \text{ а также о}$$

преобразовании Фурье функции Хевисайда:

$$\mathcal{F}[\theta(x)](\xi) = \pi \delta(\xi) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi}.$$

Отсюда по свойству сдвига преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{iax}\theta(x)](\xi) &= \pi \delta(\xi + a) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi + a}; \\ \mathcal{F}[e^{-iax}\theta(x)](\xi) &= \pi \delta(\xi - a) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi - a}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \hat{E} &= C_1 \delta(a - \xi) + \frac{1}{2a} \mathcal{P} \frac{1}{a - \xi} + C_2 \delta(\xi + a) + \frac{1}{2a} \mathcal{P} \frac{1}{a + \xi} = \\ &= \frac{i}{2a} \left(\frac{2aC_1}{i} \delta(\xi - a) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi - a} \right) + \frac{1}{2ia} \left(2iaC_2 \delta(\xi + a) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi + a} \right) = \\ &= \left\{ C_1 = \frac{\pi i}{2a}, C_2 = \frac{\pi}{2ia} \right\} = \\ &= \frac{i}{2a} \left(\pi \delta(\xi - a) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi - a} \right) + \frac{1}{2ia} \left(\pi \delta(\xi + a) + i \mathcal{P} \frac{1}{\xi + a} \right) = \\ &= \frac{i}{2a} \mathcal{F}[e^{-iax}\theta(x)](\xi) + \frac{1}{2ia} \mathcal{F}[e^{iax}\theta(x)](\xi). \text{ Следовательно,} \\ E &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{E}] = -\frac{1}{2ia} e^{-iax} \theta(x) + \frac{1}{2ia} e^{iax} \theta(x) = \theta(x) \frac{\sin ax}{a}. \end{aligned}$$

Задача 5.9. Найти фундаментальное решение оператора Лапласа в $n = 3$:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Решение. По определению $\Delta E = \delta(x_1, x_2, x_3)$. Обозначим через $\hat{E} = \mathcal{F}[E]$ — фурье-образ фундаменталки. Имеем

$$\mathcal{F} [\Delta E] = 1 \Leftrightarrow (-i\xi_1)^2 \hat{E} + (-i\xi_2)^2 \hat{E} + (-i\xi_3)^2 \hat{E} = 1 \Leftrightarrow -|\xi|^2 \hat{E} = 1. \text{ Частное решение имеет вид}$$

$$\hat{E} = -\frac{1}{|\xi|^2} = -\frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

Отметим, что
$$\iiint_{B_1(0)} \frac{1}{|\xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_0^1 \frac{1}{r^2} dr \iint_{S_r} d\sigma =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi \Rightarrow \hat{E} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3), \text{ но } \hat{E} \notin L_p(\mathbb{R}^3) \text{ ни}$$

при каком $p \geq 1$. Само фундаментальное решение есть

$$E(x) = \mathcal{F}^{-1} [\hat{E}(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{F} [\hat{E}(-\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{F} [\hat{E}(\xi)](x).$$

Найдём $\mathcal{F} \left[\frac{1}{|x|^2} \right]$ по определению: $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$(\mathcal{F}[f], \varphi) = (f, \mathcal{F}[\varphi])$. Рассмотрим грубую срезку: $|x| \leq R \Rightarrow \frac{1}{|x|^2}$; $|x| > R \Rightarrow 0$. Тогда

$$\left(\mathcal{F} \left[\frac{1}{|x|^2} \right], \varphi \right) = \left(\frac{1}{|x|^2}, \mathcal{F}[\varphi] \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} \frac{dx}{|x|^2} \int e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_{|x| < R} \frac{e^{i(x,\xi)} dx}{|x|^2} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^R d\rho \int_0^\pi \frac{e^{i|x||\xi|\cos\theta}}{\rho^2} \rho^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^R d\rho \int_0^\pi e^{i|x||\xi|\cos\theta} \sin\theta d\theta = \{\cos\theta = \mu\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^R d\rho \int_{-1}^1 e^{i\rho|\xi|\mu} d\mu = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^R \frac{e^{i\rho|\xi|\mu}}{i\rho|\xi|} \Big|_{-1}^1 d\rho = \\
&= 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^R \frac{e^{i\rho|\xi|} - e^{-i\rho|\xi|}}{2i\rho|\xi|} d\rho = \\
&= 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) d\xi \int_0^R \frac{\sin \rho|\xi|}{\rho|\xi|} d\rho = 4\pi \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} d\xi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin \rho|\xi|}{\rho} d\rho = \\
&= 4\pi \int \varphi(\xi) \frac{\pi}{2|\xi|} d\xi = \int \frac{2\pi^2}{|\xi|} \varphi(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

При выводе мы пользовались интегралом $\int_0^\infty \frac{\sin \rho|\xi|}{\rho} d\rho = \frac{\pi}{2},$

который можно найти методами ТФКП (с помощью вычетов).

$$\begin{aligned}
\text{Итак, } \mathcal{F} \left[\frac{1}{|x|^2} \right] &= \frac{2\pi^2}{|\xi|}. \text{ Отсюда } E(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[-\frac{1}{|\xi|^2} \right] (x) = \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{F} \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right] (x) = -\frac{1}{8\pi^3} \frac{2\pi^2}{|x|} = -\frac{1}{4\pi|x|}.
\end{aligned}$$

Ответ: $E = -\frac{1}{4\pi|x|}.$