Задача Штурма—Лиувилля

Рассмотрим общую задачу Штурма—Лиувилля с краевыми условиями

$$\begin{cases} -(p(x)X')' + q(x)X = \lambda X, 0 < x < l, \\ \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \alpha_1 X'(l) + \beta_1 X(l) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$ для всех $x \in [0,l]$; $q \in C[0,l]$; $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, и всё принадлежит полю $\mathbb{R}$.

Постановка задачи Штурма—Лиувилля: найти все такие λ, что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (1).

- λ — собственные значения задачи (1);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (1), соответствующие собственному значению λ.

Эквивалентная формулировка задачи (1):
$LX = -(p(x)X')' + q(x)X$ — формально самосопряжённый ЛДО второго порядка (дивергентный оператор второго порядка); $L : D \to L_2(0,l)$ — неограниченный самосопряжённый оператор, где
$D = \{X \in C^1[0,l] : \exists X'' \in L_2(0,l), \alpha_0 X'(0) + \beta_0 X(0) = 0, \alpha_1 X'(l) + \beta_1 X(l) = 0.\}$
— всюду плотное подпространство в $L_2(0,l)$, поскольку $\mathscr{D}(0,l) \subset D$ и $\mathscr{D}(0,l) = C_0^\infty(0,l)$ всюду плотно в $L_2(0,l)$.

Задача Штурма—Лиувилля — это задача на отыскание с.з. и с.ф. определённого выше оператора L: $LX = \lambda X$, $D \ni X \neq 0$.

Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля (1):

(i) собственные значения образуют бесконечное (счётное) множество на действительной прямой;
(ii) множество собственных значений ограничено снизу;
(iii) все собственные значения имеют конечную кратность;
(iv) множество с.з. не имеет конечных предельных точек;

(v) упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений стремится к плюс бесконечности;

(vi) собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны в пространстве $L_2(0,l)$:

$$(X_n, X_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0,\ n \neq m;$$

(vii) система, которая получается объединением конечного множества ортогональных собственных функций от каждого собственного значения, есть ортогональный базис пространства $L_2(0,l)$.

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), $K : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор в H, $\left(\ker K\right)^{\perp}$ — ортогональное дополнение ядра K. Предположим, что $\dim \left(\ker K\right)^{\perp} = \infty$. Тогда

1) $\sigma(K) = \sigma_d(K) \Subset \mathbb{R}$, $\sharp\sigma(K) = \aleph_0$ (спектр оператора K дискретен, то есть состоит из собственных значений, и представляет собой счётное ограниченное подмножество действительной прямой);
2) единственная предельная точка $\sigma(K)$ есть нуль;
3) $\forall \lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ $\dim \ker(K - \lambda I) < \infty$, т.е. любое ($\neq 0$) собственное значение K имеет конечную кратность (это немедленно следует из теоремы Фредгольма);
4) пусть $\sigma(K)\backslash\{0\} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d_k = \dim \ker(K - \lambda_k I)$, $h_1^{(k)}, \ldots,$ $h_{d_k}^{(k)}$ — ортогональный базис $\ker(K - \lambda_k I)$, тогда $\left\{ h_j^{(k)} \,|\, k \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, d_k \right\}$ — ортогональный базис $\left(\ker K\right)^{\perp}$.

Пусть оператор $LX = -(p(x)X')' + q(x)X$ допускает функцию Грина $G = G(x,s)$ с краевыми условиями из задачи (1). Тогда, очевидно, задачу (1) можно представить в виде эквивалентного интегрального уравнения

$$X(x) = \lambda \int_0^l G(x,s)X(s)ds. \qquad (2)$$

Оператор $K : L_2(0,l) \to L_2(0,l)$, определённый формулой $L_2(0,l) \ni X \mapsto KX = \int_0^l G(\cdot, s)X(s)ds$, есть компактный оператор в пространстве $L_2(0,l)$, так как $G \in C\left(\overline{(0,l)\times(0,l)}\right) \subset L_2\left((0,l)\times(0,l)\right)$. Его самосопряжённость следует из симметрии функции Грина: $G(x,s) = G(s,x)\ \forall x, s \in [0,l]$. Итак, к оператору K применима теорема Гильберта—Шмидта. Как связаны операторы L и K? А вот как: $KL = I_{L_2(0,l)}$. Действительно, уравнение (2) можно переписать в виде $X = \lambda KX \Leftrightarrow LX = \lambda X$. Разделим первое уравнение на λ: $KX = \frac{1}{\lambda}X$. Таким образом, свойства с.з. и с.ф. следуют из теоремы Гильберта—Шмидта, кроме ограниченности снизу.

Упражнение. Доказать, что множество собственных значений ограничено снизу. Для этого рассмотреть форму $(LX, X)_{L_2(0,1)}$ на D.

Пример 5.2. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля (λ — спектральный параметр):

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Постановка задачи Штурма—Лиувилля: найти все такие λ, что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (3).

- λ — собственные значения задачи (3);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (3), соответствующие собственному значению λ.

Альтернативная формулировка задачи (3):
$LX = -X''$, $L : D \to L_2(0,l)$ — неограниченный оператор, но самосопряжённый;
$\mathscr{D}(0,l) \subset D = \left\{X \in C^1[0,l] : \exists X'' \in L_2(0,l), X(0) = 0, X'(l) = 0\right\}$ — всюду плотное подпространство в $L_2(0,l)$;
задача Штурма—Лиувилля — это задача на отыскание с.з. и с.ф. определённого выше оператора L: $LX = \lambda X$, $D \ni X \neq 0$.
Покажем самосопряжённость L:
для $X_1, X_2 \in D$ имеем $(X_1, L^*X_2)_{L_2(0,l)} = (LX_1, X_2)_{L_2(0,l)} =$

$$= \int_0^l -X_1''(x)X_2(x)dx = -X_1'(x)X_2(x)\Big|_0^l + \int_0^l X_1'(x)X_2'(x)dx =$$

$$= X_1(x)X_2'(x)\Big|_0^l - \int_0^l X_1(x)X_2''(x)dx = (X_1, LX_2)_{L_2(0,l)} \Rightarrow L^* = L.$$

Мы показали, что оператор L действительно самосопряжён $\Rightarrow$ все собственные значения L действительные. Кроме того, нетрудно видеть, что $\forall X \in D$, $X \neq 0$, $(LX, X)_{L_2(0,l)} > 0$, т.е. самосопряжённый оператор L положительно определён $\Rightarrow$ все собственные значения положительны.

Решим задачу Штурма-Лиувилля (3), для чего рассмотрим три случая.

a) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Имеем $X' = -\omega C_1 e^{-\omega x} + \omega C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -\omega C_1 e^{-\omega l} + \omega C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородным алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\omega e^{-\omega l} & \omega e^{\omega l} \end{vmatrix} = \omega(e^{\omega l} + e^{-\omega l}) = 0.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Имеем $X' = C_1$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

c) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Имеем $X' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -\omega C_1 \sin \omega l + \omega C_2 \cos \omega l = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\cos \omega l = 0$. Отсюда $\omega_n = \dfrac{\pi}{l}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (3) есть $\lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{l^2}n^2 + o\left(n^2\right), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = b_n \sin \omega_n x = b_n \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}, b_n \neq 0.$$

$$\|X_n\|_{L_2(0,l)} = 1 \Rightarrow b_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Отметим следующие свойства собственных значения и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля:

- собственные значения образуют бесконечное (счётное) множество;
- все собственные значения неотрицательные (даже положительные);
- все собственные значения имеют кратность 1;
- множество собственных значений не имеет конечных предельных точек;
- упорядоченная по возрастанию последовательность собственных значений стремится к плюс бесконечности;
- собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны в пространстве $L_2(0,l)$:

$$(X_n, X_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0, n \neq m.$$

- $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ортогональный базис пространства $L_2(0,l)$.

Пример 5.3. Рассмотрим ещё три примера задачи Штурма—Лиувилля и один пример спектральной задачи, близкой к задаче Штурма—Лиувилля.

(i)

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Постановка задачи Штурма—Лиувилля прежняя: найти все такие λ, что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (5).

- λ — собственные значения задачи (5);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (5), соответствующие собственному значению λ.

Решим задачу Штурма—Лиувилля (5), для чего рассмотрим три случая.

a) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\omega l} + C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородным алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega l} & e^{\omega l} \end{vmatrix} = e^{\omega l} - e^{-\omega l} = 0$. Отсюда $e^{2\omega l} = 1$. Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 l + C_2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

c) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega l = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sin \omega l = 0$. Отсюда $\omega_n = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (8) есть $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_n(x) = b_n \sin \omega_n x = b_n \sin \dfrac{\pi n x}{l}$, $b_n \neq 0$.

Свойства собственных значений и собственных функций задачи (5) аналогичны свойствам собственных значений и собственных функций задачи (3).

(ii)

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ -X'(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (7) имеют вид $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 (n + 1/2)^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (такие же, как у задачи (3)), а соответствующие собственные функции имеют вид $X_n(x) = a_n \cos \omega_n x = a_n \cos \dfrac{\pi (n + 1/2) x}{l}$, $a_n \neq 0$.

Свойства собственных значений и собственных функций задачи (7) аналогичны свойствам собственных значений и собственных функций задачи (3).

(iii)

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ -X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (11) имеют вид $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_n(x) = a_n \cos \omega_n x = a_n \cos \dfrac{\pi n x}{l}$, $a_n \neq 0$.

Свойства собственных значений и собственных функций задачи (8) аналогичны свойствам собственных значений и собственных функций задач (3), (5) и (7), но с одной разницей: теперь $\lambda = 0$ — это собственное значение, а не равные нулю константы — это соответствующие ему собственные функции.

(iv) Рассмотрим ещё одну спектральную задачу

$$\begin{cases} -Y(\theta)'' = \lambda Y(\theta), \ -\infty < \theta < \infty, \\ Y(\theta + 2\pi) \equiv Y(\theta) \ - \text{ периодическое условие}. \end{cases} \qquad (9)$$

Постановка спектральной задачи (9): найти все такие λ, что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) 2π-периодические решения уравнения $-Y'' = \lambda Y$ на действительной прямой.

- λ — собственные значения задачи (9);
- $Y = Y(\theta)$ — собственные функции задачи (9), соответствующие собственному значению λ.

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $-Y''(\theta) = \lambda Y(\theta)$ следует эквивалентность задачи (12) и задачи вида

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \lambda Y(\theta), 0 < \theta < 2\pi, \\ Y(0) = Y(2\pi), \\ Y'(0) = Y'(2\pi). \end{cases} \qquad (10)$$

Оператор $L = -\dfrac{d^2}{d\theta^2}$ — неограниченный, самосопряжённый и неотрицательно полуопределённый оператор в пространстве $L_2(0,2\pi)$ с пространством определения

$D = \{Y \in C^1[0,2\pi] : \exists Y'' \in L_2(0,2\pi), Y(0) = Y(2\pi), Y'(0) = Y'(2\pi)\}$, поэтому его собственные значения принадлежат $[0, +\infty)$. Легко видеть, что $\lambda_0 = 0$ — собственное значение задачи (10), $Y_0 = 1$ — соответствующая ему собственная функция.

Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$, тогда общее решение уравнения задачи (10) есть $Y(\theta) = A\cos\omega\theta + B\sin\omega\theta$,

$Y'(\theta) = -\omega A \sin\omega\theta + \omega B \cos\omega\theta$. Подстановка общего решения в условия задачи (13) приводит к системе

$$\begin{cases} A(\cos 2\pi\omega - 1) + B\sin 2\pi\omega = 0, \\ A(-\omega \sin 2\pi\omega) + B(\omega\cos 2\pi\omega - \omega) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда её определитель равен нулю. Последний равен $4\omega \sin^2 \pi\omega$. Отсюда характеристическое уравнение для корней из собственных значений задачи (9) или (10) есть $\sin^2 \pi\omega = 0$. Его корни $\omega_k = k$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому все положительные собственные значения спектральной задачи есть $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, а соотвествующие линейно независимые собственные функции $Y_k^{(1)}(\theta) = \cos(k\theta)$, $Y_k^{(2)}(\theta) = \sin(k\theta)$ (так как при $\omega = k$ система (14) тривиальна). Таким образом, все положительные собственные значения задачи (10) (следовательно, и задачи (9)) имеют кратность два. Упорядоченное множество собственных функций

$$\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \ldots\} \quad (12)$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2(0,2\pi)$.

Пример 5.4. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля с краевым условием третьего рода

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ X(0) = 0, X'(l) + \sigma X(l) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

$\sigma = 0 \Rightarrow$ пример 5.2. Далее считаем, что $\sigma \neq 0$.
Эквивалентная формулировка задачи (13):
$LX = -X''$, $L : D \to L_2(0,l)$ — неограниченный оператор, но самосопряжённый;
$\mathscr{D}(0,l) \subset D = \left\{X \in C^1[0,l] : \exists X'' \in L_2(0,l), X(0) = 0, X'(l) + \sigma X(l) = 0\right\}$ — всюду плотное подпространство в $L_2(0,l)$. Задача Штурма—Лиувилля (15) — это задача на отыскание с.з. и с.ф. оператора L: $LX = \lambda X$, $D \ni X \neq 0$.

Замечание. Можно показать, что если $\sigma \geqslant 0$, то оператор L положительно определён $\Rightarrow$ все с.з. оператора L положительны.

Рассмотрим, как водится, три случая.

а) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Имеем $X' = -\omega C_1 e^{-\omega x} + \omega C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ (\sigma - \omega) C_1 e^{-\omega l} + (\sigma + \omega) C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородным алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (\sigma - \omega) e^{-\omega l} & (\sigma + \omega) e^{\omega l} \end{vmatrix} = (\sigma + \omega) e^{\omega l} - (\sigma - \omega) e^{-\omega l} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2\omega l} = \frac{\sigma - \omega}{\sigma + \omega} = -1 + \frac{2\sigma}{\sigma + \omega}. \qquad (14)$$

- $\sigma \geqslant 0 \Rightarrow$ уравнение (14) положительных корней не имеет;
- $\sigma < 0 \Rightarrow$ >0 корень может быть, но только один и меньше $-\sigma$.

Пусть $\omega_* \in (0, -\sigma)$ — корень уравнения (14). Тогда $\lambda_* = -\omega_*^2$ — единственное отрицательное с.з., а соответствующая с.ф. имеет вид $X_*(x) = \sinh(\omega_* x)$. А именно, если $\sigma \geqslant \sigma_{cr}$, то уравнение (14) не имеет положительных корней, а если $\sigma < \sigma_{cr}$, то уравнение (14) имеет единственный положительный корень.

Чему равно σ_{cr}? Чтобы его найти нужно сравнить угловые коэффициенты касательных к графикам функций $F = e^{2\omega l}$, $G = \dfrac{\sigma - \omega}{\sigma + \omega}$ в точке (0; 1). Имеем

$A = F'\big|_{\omega=0} = 2le^{2\omega l}\Big|_{\omega=0} = 2l,$

$B = G'\big|_{\omega=0} = -\dfrac{2\sigma}{(\sigma+\omega)^2}\Bigg|_{\omega=0} = -\dfrac{2}{\sigma}$. Если $A < B \Leftrightarrow$ $\sigma > -\dfrac{1}{l} = \sigma_{cr}$, то положительных корней нет $\Rightarrow$ нет отрицательных с.з.. Если $A > B \Leftrightarrow \sigma < -\dfrac{1}{l} = \sigma_{cr}$, то уравнение (17) имеет единственный положительных корень $\Rightarrow$ ровно одно отрицательное с.з. Если $A = B \Leftrightarrow$ $\sigma = -\dfrac{1}{l} = \sigma_{cr}$, то уравнение (17) не имеет положительных корней $\Rightarrow$ нет отрицательных с.з.

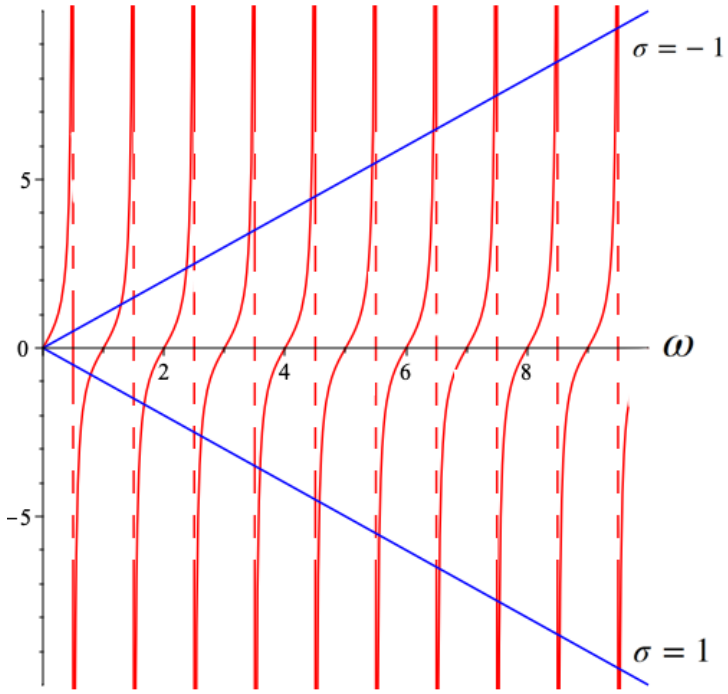
b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Имеем $X' = C_1$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 + \sigma(C_1 l + C_2) = 0 \Rightarrow$ $(1 + \sigma l)C_1 = 0$.

- $1 + \sigma l \neq 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ — не собственное значение;
- $1 + \sigma l = 0 \Rightarrow \sigma = -\dfrac{1}{l} = \sigma_{cr} \Rightarrow \lambda = 0$ — собственное значение, а соответствующая с.ф. имеет вид $X_0(x) = x$.

c) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Имеем $X' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ (\sigma \cos \omega l - \omega \sin \omega l)C_1 + (\sigma \sin \omega l + \omega \cos \omega l)C_2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sigma \sin \omega l + \omega \cos \omega l = 0 \Leftrightarrow \tan \omega l = -\dfrac{\omega}{\sigma}$. Это уравнение имеет счётное множество положительных корней, $\omega_n = \dfrac{\pi}{l} n + o(n)$, $n \to \infty$ (см. рисунок). Отсюда собственные значения $\lambda_n = \omega_n^2 = \dfrac{\pi^2}{l^2} n^2 + o\left(n^2\right)$,



$n \to \infty$, а собственные функции $X_n(x) = \sin \omega_n x$, $n \in \mathbb{N}$.

Итоги:

- всегда есть счётное множество положительных с.з., которые можно найти, решив трансцендентное уравнение $\sigma \sin \omega l + \omega \cos \omega l = 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$; соответствующие с.ф. есть $X_n(x) = b_n \sin \omega_n x$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$;
- если $\sigma < -\dfrac{1}{l}$, то $\exists$ровно одно отрицательное с.з., которое является квадратом корня $\omega = \omega_*$ уравнения $(\sigma + \omega) e^{\omega l} - (\sigma - \omega) e^{-\omega l} = 0$, нулевого с.з. нет; соответствующая с.ф. $X_*(x) = \sinh(\omega_* x)$;
- если $\sigma = -\dfrac{1}{l}$, то есть нулевое с.з., отрицательных с.з. нет; соответствующая с.ф. $X_0(x) = x$;
- если $\sigma > -\dfrac{1}{l}$, то нет неположительных с.з.